RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 aprile 1914.

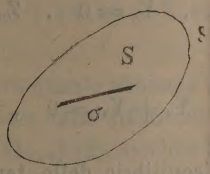
P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota I del Socio Carlo Somigliana.

I.

Oggetto di questa Nota è di stabilire nel modo più generale il problema delle deformazioni di un corpo elastico, quando in esso avvengono delle interposizioni o soppressioni di sottili strati di materia lungo una data superficie, e l'equilibrio si ristabilisce senza intervento alcuno di forze esterne.



Deformazioni di questa specie sono state studiate largamente, e con brillante successo, dal prof. Volterra che le chiamò *distorsioni*. Manterremo anche noi questa denominazione, notando però subito che, in ciò che segue, essa assumerà un significato più ampio di quello che essa ha nei lavori del Volterra. Ecco come porremo il problema delle distorsioni.

Sia S lo spazio occupato dal corpo elastico, s la superficie che lo limita. Sia poi σ una superficie che supporremo dapprima, per semplicità, tutta

discontinuità, nel senso precedentemente indicato quando non intervengano forze esterne a ristabilire l'equilibrio.

Queste considerazioni si estendono immediatamente al caso in cui σ incontra la superficie s.

II.

Le relazioni $(1_{a,b})$ devono valere lungo tutta la superficie σ e comprendono tutte le condizioni meccaniche relative alla distorsione da aggiungersi alle equazioni indefinite dell'equilibrio. Le (1_a) potranno quindi essere derivate lungo direzioni tangenti alla σ e potremo da esse dedurre nuove condizioni parimenti necessarie.

Data l'invarianza delle relazioni precedenti rispetto alla posizione degli assi coordinati, per studiare il significato delle $(1_{a,b})$ in un punto generico di σ, potremo fissare che gli assi siano presi in modo che la direzione positiva dell'asse z coincida con la direzione della normale ν in quel punto. Due direzioni ortogonali arbitrariamente scelte nel piano tangente a σ, che supporremo sempre determinato, daranno le direzioni degli assi delle x e delle y.

Potremo quindi derivare le (1_a) rispetto ad x e ad y. E per brevità indicheremo con $D[f]$ il salto che una funzione f subisce nel passaggio attraverso σ nella direzione di ν. Cioè se f_ν ed $f_{\nu'}$ sono rispettivamente i valori di f sulle due faccie di σ, porremo

$$D[f] = f_\nu - f_{\nu'}.$$

Dalle (1_a) allora derivando rispetto ad y troviamo

$$(3) \qquad D[x_\alpha] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \quad , \quad D[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}.$$

Queste equazioni ci determinano le discontinuità attraverso la superficie σ di tre dei sei coefficienti di deformazione; è facile vedere che le (1_b) ci determinano le discontinuità dei rimanenti tre. Esse infatti possono essere scritte, tenendo conto dell'attuale orientazione degli assi

$$D[X_z] = 0 \quad , \quad D[Y_z] = 0 \quad , \quad D[Z_z] = 0$$

e siccome X_z, Y_z, Z_z sono funzioni lineari indipendenti dei sei coefficienti di deformazione, le equazioni precedenti, tenendo conto delle (3) potranno porsi sotto la forma

$$D[a_{3i} z_z + a_{4i} y_z + a_{5i} z_x] = -\left[a_{1i} \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + a_{2i} \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + a_{6i} \left(\frac{\partial w_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} \right) \right]$$

$$i = 3, 4, 5$$

ove le a_{ih} sono delle costanti, che rappresentano i coefficienti dell'espressione dell'energia. E siccome le stesse equazioni possono scriversi anche sotto la forma

$$(4) \qquad a_{3i}\,D[z_z] + a_{4i}\,D[y_z] + a_{5i}\,D[z_x] = \\ = -\left[a_{1i}\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + a_{2i}\frac{\partial v_\sigma}{\partial y} + a_{6i}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}\right)\right]$$

risolvendo rispetto a $D[z_z]$, $D[y_z]$, $D[z_x]$ avremo le discontinuità richieste.

Nel caso dell'isotropia queste equazioni sono

$$D[X_z] = \mu\,D[x_z] = 0 \quad , \quad D[Y_z] = \mu\,D[y_z] = 0\,,$$
$$D[Z_z] = D[\lambda(x_x + y_y) + (\lambda + 2\mu)\,z_z] = 0\,,$$

ove λ, μ sono le solite costanti dell'isotropia.

Abbiamo di qui

$$D[x_z] = 0 \quad , \quad D[y_z] = 0$$
$$D[z_z] = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

Possiamo dunque concludere *che le condizioni poste rispetto alla superficie* σ, *cioè le* $(1_{a,b})$, *determinano in modo completo le discontinuità che attraversando questa superficie debbono subire tutti i sei coefficienti di deformazione*

$$x_x \quad y_y \quad z_z \quad y_z \quad z_x \quad x_y\,.$$

Da ciò segue che fissando, come ha fatto Weigarten [1], per definire le distorsioni, che i sei coefficienti di deformazione debbono essere continui attraverso il taglio, *si vengono a porre delle condizioni nuove ad un problema già per se stesso fisicamente e analiticamente determinato*, cioè si viene a trattare un problema speciale, della cui opportunità può discutersi sotto altri punti di vista.

Giova però osservare che se la continuità di tutti i coefficienti di deformazione, e quindi di quelli di tensione, porta a considerare nell'intorno di un punto qualunque appartenente al taglio una distribuzione di tensioni analoga a quella che si ha nei punti ordinarî del corpo, in modo cioè, come si esprime il Volterra, che non resti traccia del taglio, e della interposizione o sottrazione di materia, anche nel caso più generale nostro non si ha, nell'intorno dei punti del taglio, una distribuzione di tensioni che contraddica alle ordinarie leggi dell'equilibrio. Difatti queste sono completamente rispettate per gli elementi superficiali tangenti a σ. E per quelli che attraversano

[1] *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem., 1901.

questa superficie avviene invece che possono considerarsi come separati in due elementi, l'uno situato da una parte e l'altro dall'altra di σ, ciascuno dei quali per se stesso è soggetto a due tensioni uguali e contrarie (a cagione della continuità lungo σ) come ordinariamente avviene per tutti gli elementi superficiali interni ad un corpo elastico. Queste due porzioni dell'elemento sono quindi in equilibrio, ciascuna separatamente, sebbene soggette a tensioni generalmente diverse.

Da ciò che precede possiamo dedurre le condizioni perchè tutti i sei coefficienti di deformazione (e quindi di tensione) siano continui attraverso il taglio, cioè si verifichi la distribuzione supposta da Weingarten. Queste condizioni, in base alle (3) (4), sono evidentemente le seguenti

$$(5) \qquad \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} = 0 .$$

Il Weingarten ha dato una interpretazione geometrica di tali condizioni che egli ha trovato sotto altra forma.

Notiamo intanto che in queste relazioni gli assi x, y si devono intendere appartenenti ad una terna di assi variabili da punto a punto sopra σ, in modo che l'asse delle z sia sempre coincidente colla normale alla superficie.

Il significato delle (5) è allora che nel passaggio dalla superficie σ a quella infinitamente vicina che si ottiene facendo subire ad ogni punto uno spostamento di componenti u_σ, v_σ non vi sono nè allungamenti lineari, nè variazioni nell'angolo di due direzioni ortogonali; ossia l'elemento superficiale si mantiene rigido. Il che porta, secondo anche Weingarten, alla condizione che le due superficie debbano essere applicabili.

Qui però conviene aggiungere un'osservazione di notevole importanza.

Noi possiamo infatti soddisfare alle (5), oltre che nel modo anzidetto, anche supponendo che le u_σ, v_σ siano nulle in tutti i punti della superficie e attribuendo alla w_σ valori arbitrarî. La discontinuità si conserva quindi per la sola componente normale.

Esiste quindi una distorsione che soddisfa alle condizioni di Weingarten (cioè alla condizione che siano continui tutti i coefficienti di deformazione attraverso σ) e che si ottiene spostando normalmente al taglio tutte le coppie di punti corrispondenti sulle due faccie di esso.

Questa distorsione è completamente sfuggita al Weingarten. Io ho già avuto occasione di segnalarla in un caso speciale, quello in cui σ è piana (1).

Naturalmente questa distorsione può sussistere insieme a quella precedentemente considerata; e così dalla sovrapposizione delle due si ha il tipo

(1) *Sulle deformazioni elastiche non regolari.* Atti del IV Congresso dei Matematici. Roma, 1908.

più generale delle distorsioni, che nella citata Comunicazione al Congresso di Roma ho proposto di chiamare *di Weingarten.*

Questo risultato risolve così in modo completo la quistione relativa alle condizioni perchè una distorsione sia di Weingarten. Il risultato a cui ero giunto nel caso di un taglio piano si estende in modo semplicissimo e diretto al caso di un taglio secondo una superficie qualunque (1).

III.

È nota la corrispondenza che esiste fra i problemi della Statica elastica ed alcuni problemi della teoria del potenziale, corrispondenza che è stata la base delle geniali ricerche del Betti nella Teoria dell'elasticità.

Nella teoria delle distorsioni questa corrispondenza è stata interpretata dal Volterra come una analogia fra idrodinamica ed elastostatica. Vediamo quale sia il significato dei precedenti risultati sotto questo punto di vista.

Proponiamoci il problema di trovare una funzione V armonica in uno spazio S, la quale debba avere sulla superficie s la derivata normale interna nulla, e sia sempre regolare essa e le sue derivate prime e seconde in tutto S, eccetto che sopra una superficie σ, interna ad S, attraverso la quale essa debba avere assegnate discontinuità, mentre la derivata normale si conserva continua.

Debbasi cioè avere

$$(6_a) \qquad \Delta_2 V = 0 \quad \text{in tutto S}$$

$$(6_b) \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{sopra } s$$

$$(6_c) \qquad V_\nu - V_{\nu'} = g\,, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial \nu'} = 0 \quad \text{sopra } \sigma$$

ove g è una funzione arbitrariamente data, che supporremo però regolare, in tutti i punti di σ.

È facile vedere che la V, dalle condizioni precedenti, è univocamente determinata all'infuori di una costante additiva.

Si ha infatti dalle (6_a)

$$\int_S \Delta_1 V dS = -\int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int_\sigma V_\nu \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma - \int_\sigma V_{\nu'} \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\sigma$$

(1) Devo qui notare che pressochè nella stessa epoca in cui compariva la Nota del Weingarten, il prof. Gebbia, in una Memoria degli Annali di Matematica: *Le deformazioni tipiche dei corpi solidi elastici* (Ser. III, tom. VII, 1902). considerava le deformazioni elastiche per interposizione o soppressione di materia, con concetti che in parte collimano con quelli dai quali noi siamo partiti.

e quindi per le $(6_{b,c})$

$$\int \Delta_1 V dS = -\int_\sigma (V_\nu - V_{\nu'}) \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = -\int_\sigma g \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma .$$

Questa relazione è l'analoga della (A) e ci dice subito che due funzioni le quali soddisfacciano alle $(6_{a,b,c})$ non possono differire che per una costante. Il problema proposto è nella teoria del potenziale l'analogo del problema delle distorsioni, come noi l'abbiamo posto, nella statica elastica.

Osserviamo ora che mentre la seconda delle (6_c) determina il modo di comportarsi della derivata normale di V attraverso σ, la prima assegna invece determinate discontinuità per le derivate tangenziali. Assumendo infatti gli assi x, y nel piano tangente in un punto di σ, troviamo

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial x} - \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial x} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V_\nu}{\partial y} - \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial y} = \frac{\partial g_\sigma}{\partial y} .$$

E analogamente derivando un'altra volta rispetto ad x e ad y ricaviamo

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x \partial y} .$$

Risultano così determinate dalla prima equazione (6_c) le discontinuità di tre delle derivate seconde. Dalla seconda delle (6_c), che può scriversi

$$\frac{\partial V_\nu}{\partial z} = \frac{\partial V_{\nu'}}{\partial z} ,$$

derivando rispetto ad x, e y abbiamo le discontinuità (che in questo caso sono nulle) di altre due

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial x \partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2 V_\nu}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial y \partial z} ,$$

e finalmente la discontinuità della sesta derivata risulta determinata dalla equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 V_\nu}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_{\nu'}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_\sigma}{\partial y^2} .$$

Possiamo dunque concludere che le due relazioni (6_c) determinano le discontinuità di tutte le derivate prime e seconde della funzione V.

Che la funzione V possa effettivamente esistere risulta subito dall'osservare che per le condizioni $(6_{b,c})$ si ha

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds + \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\sigma = 0 .$$

Come possa determinarsi risulta dalle considerazioni seguenti. Poniamo

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma ,$$

ove r indica la distanza da un punto generico di σ, e, indicando con U una nuova funzione da determinarsi invece di V, poniamo

$$V = U + W .$$

Cerchiamo a quali condizioni deve soddisfare la U. Per le proprietà ben note dei potenziali di doppio strato, avendosi sopra σ

$$W_\nu - W_{\nu'} = g$$

dovremo avere

$$(7_a) \qquad U_\nu - U_{\nu'} = 0 .$$

La U sarà quindi continua attraverso σ, e dovranno essere parimenti continue tutte le sue derivate prime e seconde. Difatti dalla seconda delle (6_c) e per le proprietà delle derivate normali della W, dovrà essere

$$(7_b) \qquad \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu'} = 0 .$$

E da questa relazione insieme alla (7_a), col procedimento precedentemente indicato, risulta appunto la continuità di tutte le derivate prime e seconde. In altri termini siccome la funzione W e le sue derivate prime e seconde hanno su σ le stesse discontinuità che deve avere la V, la funzione U e le sue derivate prime e seconde dovranno essere continue.

Quindi U dovrà essere in S armonica, finita e continua insieme a tutte le sue derivate prime e seconde; inoltre sulla superficie s dovrà soddisfare alla condizione

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial W}{\partial n} ,$$

mentre d'altra parte si ha

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial n} ds = - \int_s \frac{\partial W}{\partial n} ds - \int_\sigma \left(\frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \nu'} \right) d\sigma = \int_S \Delta_2 W dS = 0 .$$

Il problema è quindi ridotto alla determinazione di una funzione armonica e regolare in uno spazio S della quale sono assegnati i valori della derivata normale sulla superficie s, che ne forma il contorno. Per quanto è noto una tale funzione esiste sempre.

Conviene però osservare che pei punti della linea che forma il contorno di σ possono presentarsi in certi casi degli infiniti per le derivate della funzione W e quindi anche di V. Però tali infiniti vengono a scomparire se si suppone che sul contorno di σ si annulli la funzione g, insieme ad alcune sue derivate tangenziali.

Una osservazione di questo genere, per quanto riguarda il problema elastico, si trova nella citata mia Comunicazione al Congresso dei Matematici.

Il problema d'idrodinamica che corrisponde al problema analitico ora considerato è il seguente:

In uno spazio S, *a pareti rigide esiste una fessura* σ; *da ogni elemento superficiale di questa esce da una parte, e si assorbe dall'altra, una uguale quantità di un fluido incomprensibile nell'unità di tempo. Determinare il moto stazionario, non rotatorio del fluido, che ne consegue.*

È chiaro che un moto stazionario di questa specie può avvenire anche se lo spazio S è semplicemente connesso linearmente. Il che invece, come è ben noto, non potrebbe accadere se non vi fosse immissione od assorbimento di fluido.

A rigore nel problema enunciato il potenziale di velocità V non è determinato direttamente dalla funzione g, ma dal flusso $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ attraverso gli elementi di σ. Ma non è qui il caso di ricercare le relazioni che passano fra g e $\frac{\partial V}{\partial \nu}$.

Da quanto abbiamo detto segue poi che il caso di g costante deve essere escluso, poichè allora comparirebbero effettivamente dei valori infiniti per le derivate prime di W sulla linea del contorno di σ. Il problema idrodinamico diviene, in questo caso, quello del moto determinato nel fluido da una linea vorticosa coincidente colla linea del contorno della superficie σ. (Cfr. Lamb., *Hydrodynamics*, art. 148).

Il procedimento precedente che riconduce la determinazione della funzione V al cosidetto secondo problema di Dirichlet, suggerisce un procedimento per risolvere per via analoga, il problema delle distorsioni di un corpo elastico. Un tale concetto fu già sostanzialmente applicato dal Volterra nei casi da lui trattati.

Per estenderlo al caso nostro dobbiamo trovare la deformazione che corrisponde nella statica elastica al potenziale W di doppio strato. Di tal quistione ci occuperemo in una Nota successiva.

Matematica. — *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

Chimica. — *Sopra gli azossifenoli.* Nota del Socio ANGELO ANGELI.

Meccanica. — *Sopra le azioni a cui è soggetto un corpo entro una massa liquida in movimento.* Nota del Corrispondente E. ALMANSI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

In questa Nota ci proponiamo dapprima di eseguire l'inversione di certi integrali o, come al presente si preferisce di dire, di risolvere certe equazioni integrali di Volterra di prima specie. Gli sforzi fatti in quest'ordine di studî hanno avuto per scopo di preparare il materiale occorrente all'integrazione di una speciale categoria di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra. Però ci è parso che queste ricerche sull'inversione di integrali abbiano anche un valore loro proprio. Ed è perciò che la loro esposizione non è stata ristretta a quella parte di esse che è strettamente necessaria al conseguimento del principale scopo prefissoci. D'altra parte dobbiamo pure osservare che, mentre i risultati che esponiamo nella presente Nota sul problema dell'inversione di integrali sono suscettibili di ulteriori estensioni, in varii sensi, essi non contengono tutto quello che è indispensabile per risolvere, in tutti i casi, il problema di integrazione propostoci e di cui tratteremo nell'ultima parte di questa stessa Nota. Al fine di completare questi studii, abbiamo in animo di ritornare sull'argomento in una prossima occasione.

I.

Si tratti, in primo luogo, di determinare la funzione $\varphi(x)$ dall'equazione

$$(1) \qquad \int_0^x \varphi(\xi)\, I_n(x-\xi)\, d\xi = \Phi(x),$$

dove n è un numero intero e

$$(2) \qquad I_n(t) = \sum_{i}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,(n+i)!},$$

supposto, s'intende, che l'equazione (1) sia possibile, ciò che richiede che $\Phi(x)$ si annulli, per $x = 0$, di ordine $n+1$.

Per risolvere questa quistione, partiamo dalla formola

$$(3) \qquad I_1(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_0(x_1 - \xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi,$$

che abbiamo dimostrata in una Nota precedente (1), e teniamo presenti le notissime relazioni fra le funzioni I di diversi indici che andiamo a scrivere:

$$(4) \qquad I_0'(t) = I_1(t), \quad I_1'(t) - \frac{1}{t} I_1(t) = I_2(t), \quad 2I_n'(t) = I_{n+1}(t) + I_{n-1}(t),$$

dove l'accento è simbolo di derivata. Derivando la (3) rispetto ad x_1 e tenendo conto delle due prime relazioni (4), si trova subito

$$(5) \qquad I_2(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_1 - \xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi.$$

Vogliamo ora dimostrare che sussiste la formola generale

$$(6) \qquad I_n(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_{n-1}(x_1 - \xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi$$

che si può porre anche sotto la forma

$$(6') \qquad I_n(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_1 - \xi)\, I_{n-1}(\xi - x_0)}{x_1 - \xi}\, d\xi.$$

Poichè la (6) è giusta per $n = 1$ e per $n = 2$, per dimostrarla in generale, basta far vedere che, se essa è vera per un determinato valore di n, è vera anche per il valore successivo. E, per questo, basta derivare la (6), rispetto ad x_1, e tener conto dell'ultima delle (4).

Alla (6) si può dare anche l'aspetto seguente

$$(6'') \qquad 2I_n'(x_1 - x_0) - I_{n-1}(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1 - \xi)\, I_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0}\, d\xi.$$

Per determinare ora la funzione φ dall'equazione (1) si moltiplichino ambo i membri di essa per $\frac{I_1(x_1 - x)}{x_1 - x}\, dx$ e s'integri poi, rispetto ad x, fra 0 ed x_1. Troviamo così col solito scambio delle integrazioni e con l'aiuto

(1) Questi Rendiconti. Seduta 31 maggio 1913.

della (6″),

$$\int_0^{x_1} \varphi(\xi) \{ 2\mathrm{I}'_n(x_1 - \xi) - \mathrm{I}_{n-1}(x_1 - \xi) \} \, d\xi = \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} \, dx ,$$

da cui, supponendosi $n > 0$,

$$(7) \qquad \int_0^{x_1} \varphi(\xi) \, \mathrm{I}_{n-1}(x_1 - \xi) \, d\xi = 2\Phi'(x_1) - \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} \, dx .$$

A questo modo siamo passati dall'equazione (1) ad un'equazione analoga in cui n è sostituito con $n - 1$. Ripetendo n volte questo procedimento si perverrà ad una equazione integrale di prima specie il cui nucleo sarà $\mathrm{I}_0(x_1 - \xi)$ e che quindi sappiamo risolvere.

La formola di risoluzione della equazione (1), a cui così perveniamo, si semplifica tenendo conto della identità

$$(8) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} = \int_x^{x_1} \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - \xi)}{x_1 - \xi} \frac{\mathrm{I}_1(\xi - x)}{\xi - x} \, d\xi ,$$

la quale è un caso particolare di un'identità più generale che presto dimostreremo.

II.

Poniamo, per n, nella (6″), una volta $n - 1$ ed un'altra volta $n + 1$. Sommando e sottraendo le due equazioni, risultanti, membro a membro, otteniamo le altre due equazioni seguenti:

$$(9) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathrm{I}'_n(x_1 - x_0) - \mathrm{I}'_{n-1}(x_1 - x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{I}'_n(x_1 - \xi) \, \mathrm{I}_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0} \, d\xi ,$$

$$(10) \qquad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathrm{I}_n(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{n - 1}{n} \frac{\mathrm{I}_{n-1}(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{I}_n(x_1 - \xi)}{x_1 - \xi} \frac{\mathrm{I}_1(\xi - x_0)}{\xi - x_0} \, d\xi .$$

Queste equazioni fanno dipendere la risoluzione delle equazioni integrali di Volterra di prima specie i cui nuclei sono $\mathrm{I}'_n(x_1 - x)$, $\frac{\mathrm{I}_n(x_1 - x)}{x_1 - x}$ dalla risoluzione delle equazioni analoghe i cui nuclei sono, rispettivamente, $\mathrm{I}'_0(x_1 - x) = \mathrm{I}_1(x_1 - x)$ e $\frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x}$, la prima delle quali sappiamo risolvere. Vogliamo mostrare che anche l'altra, cioè

$$(11) \qquad \int_0^{x_1} \varphi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} \, dx = \Phi(x_1) ,$$

si può agevolmente risolvere. Da essa abbiamo infatti, a causa della (8) che si deduce dalla (10) per $n = 1$,

$$\int_0^{x_1} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x} \, dx .$$

Sottraendo questa equazione, membro a membro, da quella che si ottiene derivando la (11) rispetto ad x_1, abbiamo subito

$$\varphi(x_1) = 2\Phi'(x_1) - \int_0^{x_1} \Phi(x) \frac{\mathrm{I}_1(x_1 - x)}{x_1 - x}\, dx\,. \tag{12}$$

III.

Passiamo adesso a risolvere l'altra equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^n\,\mathrm{I}_n(x-\xi)\,d\xi = \Phi(x)\,, \qquad n>0 \tag{13}$$

supposto, naturalmente, che essa sia possibile. Deriviamo perciò la (13), rispetto ad x, tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[(x-\xi)^n\,\mathrm{I}_n(x-\xi)\Big] = (x-\xi)^n\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)\,. \tag{14}$$

Perveniamo così all'altra equazione

$$\int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^n\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)\,d\xi = \Phi'(\xi)\,. \tag{15}$$

Deriviamo ancora la (15) rispetto ad x nei due modi seguenti: una volta considerando la funzione $(x-\xi)^n\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)$ come prodotto di $x-\xi$ e di $(x-\xi)^{n-1}\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)$ ed applicando ancora la (14), un'altra volta considerando la stessa funzione come prodotto di $(x-\xi)^n$ e di $\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)$ ed applicando la terza delle (4). Si arriva così alle equazioni:

$$\int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^{n-1}\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^n\,\mathrm{I}_{n-2}(x-\xi)\,d\xi = \Phi''(x)\,,$$

$$n\int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^{n-1}\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^n\,\mathrm{I}_{n-2}(x-\xi)\,d\xi = 2\Phi''(x) - \Phi(x)$$

e, sottraendo, membro a membro, la prima dalla seconda, si trova

$$\int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^{n-1}\,\mathrm{I}_{n-1}(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\Phi(x)\,. \tag{16}$$

Con ripetuta applicazione di questo procedimento, abbiamo

$$\int_0^x \varphi(\xi)\,\mathrm{I}_0(x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^n \Phi(x) \tag{16'}$$

equazione, questa, che sappiamo risolvere.

IV.

Alla funzione $I_n(t)$ si dà un significato per ogni valore di n convenendo che

$$(17) \qquad I_n(t) = \sum_0^\infty {}^i \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2i}}{i!\,\Pi(n+i)} \quad , \quad \Pi(\alpha) = \Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha\, dx \,.$$

Anche in questa ipotesi più generale vale la relazione (14), e quindi, data l'equazione integrale (13) con n qualunque, vale pure sempre la (16) per lo stesso valore di n. Quando n è la metà di un intero dispari. ripetendo il procedimento di riduzione $n - \frac{1}{2}$ volte, dalla (13) si ottiene

$$(18) \qquad \int_0^x \varphi(\xi)\,(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\, I_{\frac{1}{2}}(x-\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,\ldots\, (2n-1)} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^{n-\frac{1}{2}} \Phi(x) \,,$$

ossia, notando che

$$(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\, I_{\frac{1}{2}}(x-\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{Sen}\,(x-\xi) \,,$$

dove il simbolo $\mathrm{Sen}\,(x-\xi)$ indica il seno iporbolico di $x-\xi$, anche

$$(18') \qquad \int_0^x \varphi(\xi)\, \mathrm{Sen}\,(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{2 \,.\, 4 \,\ldots\, (2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^{n-\frac{1}{2}} \Phi(x) \,.$$

E basta derivare due volte, rispetto ad x, questa equazione, per avere

$$(19) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,\ldots\, (2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)^{n+\frac{1}{2}} \Phi(x) \,.$$

Sappiamo quindi risolvere la (13) anche quando n è la metà di un intero dispari, anzi in questo caso essa si risolve con solo operazioni di derivazione.

V.

Sia data ora l'equazione a derivate parziali a coefficienti costanti di tipo iperbolico

$$(20) \qquad \sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi = 0 \,.$$

e proponiamoci di integrarla col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra.

L'equazione precedente corrisponde soltanto ad un tipo particolare di equazioni iperbolichè a coefficienti costanti. Il caso generale è stato preso in

considerazione dal Coulon nella sua bella tesi (1), ma esso dà luogo ad un problema d'inversione avente caratteri diversi e più complessi di quello a cui dà luogo il caso particolare che abbiamo preso in esame ed a cui soltanto vogliamo attenerci.

Escludiamo momentaneamente il caso $n = 1$ di cui vogliamo occuparci a parte più tardi. Allora l'ipercono caratteristico dell'equazione (20) che ha il vertice nel punto (x_i, t) dello spazio lineare (ξ_i, τ), nel quale, come si suole, faremo le nostre considerazioni, ha per equazione

$$(21) \qquad (t-\tau)^2 - r^2 = 0 \quad , \quad r^2 = \sum_1^n{}_i (x_i - \xi_i)^2 .$$

Questo ipercono divide lo spazio lineare ad $n+1$ dimensioni (ξ_i, τ) in tre regioni indefinite e connesse, cioè quella in cui $r^2 > (t-\tau)^2$ e le due in cui $r^2 < (t-\tau)^2$ con $\tau > t$, ovvero con $\tau < t$, e di queste tre regioni soltanto le ultime due sono semplicemente connesse. Noi vogliamo applicare il metodo di Riemann-Volterra solo in una di queste due ultime regioni e, per fissare le idee, stabiliremo di rimanere nella ragione in cui $r^2 < (t-\tau)^2$, $\tau < t$.

La soluzione fondamentale, nel metodo di Riemann-Volterra, non è completamente determinata come accade, invece, nel metodo di Riemann propriamente detto, per $n = 1$; circostanza, questa, che è lungi dal riuscire di imbarazzo. Noi sceglieremo queste soluzioni fondamentali com'è stato fatto dal Coulon, ponendo:

$$(22) \quad \varphi' = (t-\tau)^\lambda \psi(\theta) f(z) \quad , \quad \theta = \frac{r^2}{(t-\tau)^2} \quad , \quad z = \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} .$$

Sostituendo, per φ, questa espressione di φ', nella (20), si vede subito che la detta equazione è soddisfatta assoggettando le due funzione ψ ed f a soddisfare alle equazioni:

$$(23) \qquad \theta(1-\theta)\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \left(\frac{n}{2} + \frac{2\lambda - 3}{2}\theta\right)\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{\lambda}{2}\frac{\lambda - 1}{2}\psi = 0 ,$$

$$(24) \qquad \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{n + 2\lambda}{z}\frac{df}{dz} - f = 0 .$$

La funzione φ' dev'essere determinata in modo che, per $z = 0$, ossia sulla varietà conica caratterisrica $(t-\tau)^2 - r^2 = 0$, si annulli e per $r = 0$ sia:

$$\lim_{r=0} r^{n-1}\varphi' = 0 \quad , \quad \lim r^{n-1}\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = G(t-\tau) ,$$

G essendo il simbolo di funzione determinata.

(1) Paris, Hermann, 1902.

L'integrale della (24) che resta finito per $z = 0$ è determinato a meno di un fattore costante e lo assumeremo sotto la forma

$$(25) \qquad z^{-\frac{n+2\lambda-1}{2}} \, I_{\frac{n+2\lambda-1}{2}}(z).$$

Possiamo prendere inoltre, per ψ, la funzione

$$(26) \quad \psi = \theta^{\frac{2-n}{2}} (1-\theta)^{\frac{n+2\lambda-1}{2}} F\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{n+2\lambda+1}{2}, 1-\theta\right),$$

dove F è il simbolo di funzione ipergeometrica; questa funzione, infatti, soddisfa alla (23) e si annulla per $\theta = 1$ se

$$(27) \qquad n + 2\lambda - 1 > 0.$$

λ resta allora arbitrario essendo, fissato n, soggetto soltanto a soddisfare alla diseguaglianza precedente ed alle altre condizioni perchè la serie

$$F\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{n+2\lambda+1}{2}, 1\right)$$

sia convergente, ossia alle altre condizioni:

$$(27') \qquad n + \lambda - 1 > 0, \lambda + 2 > 0, n - 2 > 0.$$

Lasciamo da parte il caso $n = 2$ che si presenta con caratteri eccezionali e di cui desideriamo occuparci in seguito. Non diremo parola sul caso $n = 3$ di cui ci siamo occupati nelle Note precedenti, e supporremo perciò che sia $n \geq 4$. In questa ipotesi soddisfacciamo alle condizioni (27) e (27') prendendo $\lambda = -1$ e quindi

$$(26') \qquad \psi = \theta^{\frac{2-n}{2}} (1-\theta)^{\frac{n-3}{2}} = \left(\frac{t-\tau}{r}\right)^{n-2} \left[1 - \frac{r^2}{(t-\tau)^2}\right]^{\frac{n-3}{2}}.$$

Scegliendo φ' a questo modo, abbiamo:

$$\lim_{r=0} r^{n-1} \varphi' = 0 \quad , \quad \lim_{r=0} r^{n-1} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = (2-n)(t-\tau)^{\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(t-\tau).$$

Chiamando poi Σ_n la porzione di una varietà regolare ad n dimensioni la quale abbia la proprietà di essere incontrata, generalmente, in un punto solo da ogni parallela all'asse τ, nello spazio (ξ_i, τ), compresa nell'interno della regione $r^2 < (t-\tau)^2, \tau < t$, avremo, subito, col solito procedimento, indicando con φ una soluzione regolare della (16) e con $D\varphi$ il simbolo di derivata conormale,

$$(28) \quad 2(n-2) \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{t_0}^{t} \varphi(x_i, \tau)(t-\tau)^{\frac{n-3}{2}} I_{\frac{n-3}{2}}(t-\tau) \, d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_n} (\varphi D\varphi' - \varphi' D\varphi) \, d\Sigma_n,$$

dove t_0 indica il valore di τ nel punto d'incontro di Σ_n con la retta $r = 0$.

Nella equazione (28) n è un numero intero maggiore di 3 e quindi, per quello che abbiamo precedentemente stabilito, sappiamo determinare la funzione φ qualunque sia $n > 3$.

VI.

A solo titolo di complemento a ciò che è stato precedentemente esposto, aggiungiamo le osservazioni seguenti. Nel caso $n = 1$ si ha un solo tipo di equazioni iperboliche a coefficienti costanti che può sempre ridursi alla forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varphi = 0 , \tag{29}$$

e questa equazione s'integra nel modo più felice col metodo delle caratteristiche di Riemann propriamente detto. Questa integrazione può, però, conseguirsi anche col metodo di Riemann-Volterra.

Le due caratteristiche uscenti dal punto (x , t) del piano (ξ , τ) dividono questo piano in quattro regioni illimitate semplicemente connesse, e le nostre considerazioni possono aver luogo, indifferentemente, in una qualunque di esse. Restiamo in quella in cui $\xi \leq \tau$ e $\tau < t$, e supponiamo che sia limitata da una linea s.

La retta $\xi = x$ divide la regione finita così risultante in due regioni parziali: una adiacente alla caratteristica $\xi - \tau = x - t$, e l'altra adiacente alla caratteristica $\xi + \tau = x + t$. Basta allora applicare il teorema di reciprocità in ciascuna di queste due regioni, assumendo come funzione fondamentale, nella prima,

$$[(t - \tau) - (x - \xi)] \frac{I_1\left(\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}} ,$$

e, nella seconda

$$[(t - \tau) + (x - \xi)] \frac{I_1\left(\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}} ,$$

e combinare fra loro le due equazioni risultanti per pervenire subito ad una equazione come la seguente

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(x , \tau) \frac{I_1(t - \tau)}{t - \tau} d\tau = \text{funz. nota}$$

che sappiamo risolvere.

Matematica. — *Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé.* Nota di R. Gateaux, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Dans une Note présentée le 1er mars 1914 à l'Accademia dei Lincei, j'ai indiqué une représentation d'une fonctionnelle continue $U\left|\underset{-\infty}{\overset{\infty}{[z(t)]}}\right|$ d'une fonction réelle continue $z(t)$. M. Volterra m'a fait remarquer que ce résultat pouvait sans doute être appliqué aux fonctionnelles satisfaisant à la condition du cycle fermé.

Pour tous renseignements sur la question du cycle fermé, on pourra se reporter au chapître VII des *Leçons sur les fonctions de lignes* de M. Volterra (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

I. — Le principe du cycle fermé.

2. Soit, dans le champ réel, une fonctionnelle $U\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z(t)]}}\right|$ de la fonction $z(t)$ définie et continue ainsi que ses p premières dérivées pour $t \leq \theta$.

On dit que cette fonctionnelle *satisfait à la condition du cycle fermé* si, toutes les fois que $\underset{-\infty}{\overset{\infty}{z(t)}}$ admet la période T, la fonction de θ, $U\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z(t)]}}\right|$, admet aussi la période T.

On dit qu'elle *satisfait à la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps*, si la condition

$$U\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z(t)]}}\right| = U\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta-\lambda}{[z(t+\lambda)]}}\right|$$

est vérifiée quel que soit le nombre λ et pour toute fonction $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}$.

3. M. Volterra a démontré une proposition qu'il a appelée *principe du cycle fermé* et que j'énonce d'abord sous la forme générale suivante:

La condition du cycle fermé et la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps, sont équivalentes s'il y a dissipation des actions héréditaires; c'est-à-dire si la fonctionelle $U\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z(t)]}}\right|$ est très peu modifiée quand on modifie arbitrairement $z(t)$ pour les valeurs de t inférieures à une certaine limite $\theta - l$.

Avant d'énoncer le principe sous une forme précise, je pose une définition.

Soient $z(t)$ une fonction déterminée; $z_1(t)$ une fonction qui tend, avec ses p premières dérivées, vers la fonction $z(t)$ et ses p dérivées correspondantes, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Si, quel que soit le nombre μ positif ou nul, $\mathrm{U}\left[z_1(t+\mu)\right]_{-\infty}^{\theta-\mu}$ tend vers $\mathrm{U}\left[z(t+\mu)\right]_{-\infty}^{\theta-\mu}$ uniformément par rapport à μ, je dirai que $\mathrm{U}\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta}$ est *continue d'ordre p*, p pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots$.

Traduisons cette condition en inégalités: étant donnés la fonction $z(t)$ et le nombre positif ε, on peut déterminer η et l positifs, tels que, si l'on a, dans l'intervalle $(\theta - l, l)$,

$$|z_1(t) - z(t)| < \eta, |z_1'(t) - z'(t)| < \eta, \ldots, |z_1^{(p)}(t) - z^{(p)}(t)| < \eta,$$

on ait, quel que soit le nombre μ positif ou nul,

$$\left|\mathrm{U}\left[z_1(t+\mu)\right]_{-\infty}^{\theta-\mu} - \mathrm{U}\left[z(t+\mu)\right]_{-\infty}^{\theta-\mu}\right| < \varepsilon.$$

Ceci posé, j'utiliserai le principe sous la forme suivante:

Si la fonctionnelle $\mathrm{U}\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta}$ *satisfait à la condition du cycle fermé, et si elle est continue d'ordre p, elle vérifie la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps.*

Inversement, si elle satisfait à la condition de l'invariabilité de l'hérédité dans le temps, elle vérifie la condition du cycle fermé.

II. — Représentation.

4. Le théorème précédent va nous permettre de donner une représentation d'une fonctionnelle $\mathrm{U}\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta}$ continue d'ordre p et satisfaisant à la condition du cycle fermé. Cette fonctionnelle vérifie la relation

$$\mathrm{U}\left[z(t)\right]_{-\infty}^{\theta} = \mathrm{U}\left[z(t+\theta)\right]_{-\infty}^{0}. \tag{1}$$

Tout revient donc à trouver une représentation de $\mathrm{U}\left[z(t)\right]_{-\infty}^{0}$.

5. J'indique d'abord quelques définitions dont j'aurai besoin par la suite.

Soit θ_0 un nombre déterminé pouvant prendre la valeur $+\infty$. Soit C un ensemble de fonctions $\overset{\theta_0}{\underset{-\infty}{z(t)}}$ continues, ainsi que leurs p premières dérivées. Je dirai que l'ensemble C est *compact d'ordre p* si de toute infinité de fonctions de C on peut extraire une suite de fonctions tendant, avec leurs p premières dérivées, vers une fonction limite et ses p premières dérivées, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Je dirai qu'un ensemble Γ de fonctions $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, les nombres θ étant finis, est un *ensemble* - C_p, si l'ensemble des fonctions $\overset{0}{\underset{-\infty}{z(t+\theta)}}$, qu'on déduit de toutes les fonctions de Γ, est compact d'ordre p.

6. Je vais utiliser quelques résultats de ma Note du 1er mars (page 311, II, 2). Je les rappelle ici, et comme je me suis mal exprimé dans l'énoncé de l'un d'eux, j'en profite pour le rectifier.

Dans cette Note j'ai désigne par Ω l'ensemble des fonctions continues $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}$, et par $\Omega(A, B)$ l'ensemble de ces fonctions telles que $A(t) \leq z(t) \leq B(t)$, A et B étant deux fonctions continues.

Soient n un nombre entier positif et $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\zeta_n(t)}}$ une fonction ainsi définie:

$$\zeta_n(t) = \begin{cases} z(t) & \text{quand } |z(t)| \leq n \\ n & \text{quand } z(t) > n \\ -n & \text{quand } z(t) < -n. \end{cases}$$

Si $U\left|\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right]\right|$ *est une fonctionnelle définie et continue d'ordre* 0 *dans* Ω *on peut la représenter par l'expression*

$$U\left|\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right]\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{K_{n,0} + \sum_{s=1}^{r_n}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n} K_{n,s}(t_1, \ldots, t_s)\,\zeta_n(t_1)\ldots\zeta_n(t_s)\,dt_1\ldots dt_s\right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact d'ordre 0 *de fonctions* $z(t)$.

$K_{n,0}$ est une constante; $K_{n,s}$ une fonction continue.

Dans le cas où $U\left|\left[\overset{\infty}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right]\right|$ *n'est définie et continue d'ordre* 0 *que dans un domaine* $\Omega(A, B)$, *on peut éviter l'emploi des* $\zeta_n(t)$ *et donner pour* U *une représentation de la forme précédente où* $\zeta_n(t)$ *serait remplacée par* $z(t)$.

7. *Fonctionnelle continue d'ordre* 0 *satisfaisant à la condition du cycle fermé.*

Si cette fonctionnelle est $U[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z}}(t)]$, il nous faut d'abord une représentation de $U[\underset{-\infty}{\overset{0}{z}}(t)]$. Appliquons les résultats du n° 6, en prenant 0 comme limite supérieure des intégrales.

Supposons d'abord la fonctionnelle *définie pour toutes les fonctions continues* $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z}}(t)$: c'est-à-dire supposons qu'il y ait lieu d'envisager des actions de grandeur illimitée. Alors, les fonctions $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{\zeta_n}}(t)$ étant définies comme au n° 6 à partir de la fonction $\underset{-\infty}{\overset{0}{z}}(t)$, on a

$$U[\underset{-\infty}{\overset{0}{z}}(t)] = \lim_{n\to\infty}\left\{K_{n,0} + \sum_{s=1}^{r_n}\int_{-n}^{0}\cdots\int_{-n}^{0} K_{n,s}(t_1,\ldots,t_s)\,\zeta_n(t_1)\ldots\zeta_n(t_s)\,dt_1\ldots dt_s\right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact d'ordre 0 de fonctions $\underset{-\infty}{\overset{0}{z}}(t)$.

Si nous appliquons l'égalité (1), et effectuons le changement de variables $t_k + \theta = \tau_k$, nous obtenons la représentation

$$U[\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z}}(t)] = \lim_{n\to\infty}\left\{K_{n,0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{r_n}\int_{\theta-n}^{\theta}\cdots\int_{\theta-n}^{\theta} K_{n,s}(\tau_1-\theta,\ldots,\tau_s-\theta)\,\zeta_n(\tau_1)\ldots\zeta_n(\tau_s)\,d\tau_1\ldots d\tau_s\right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble C_0 *de fonctions* $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z}}(t)$.

Dans le cas où l'on ne considère que des actions de grandeur limitée, c'est-à-dire que *des fonctions* $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z}}(t)$ *au plus égales, en valeur absolue, à un certain nombre positif* M, on peut simplifier l'expression précédente en écrivant $z(\tau)$ au lieu de $\zeta_n(\tau)$.

8. *Fonctionnelle continue d'ordre p satisfaisant à la condition du cycle fermé.* — La condition de continuité est d'autant plus générale et moins restrictive pour la fonctionnelle que p est plus élevé.

Soit n un nombre entier positif. Désignons par $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{\zeta_{n,p}}}(t)$ les fonctions définies de la façon suivante à partir de la dérivée d'ordre p de la fonction $\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z}}(t)$:

$$\zeta_{n,p}(t) = \begin{cases} z^{(p)}(t) & \text{quand } |z^{(p)}(t)| \leq n \\ n & \text{quand } z^{(p)}(t) > n \\ -n & \text{quand } z^{(p)}(t) < -n. \end{cases}$$

Si la fonctionnelle $\mathrm{U}\left|\overset{\theta}{\underset{-\infty}{[z(t)]}}\right|$ est *définie pour toutes les fonctions* $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$ *admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre* p, on démontre qu'elle admet la représentation

$$\mathrm{U}\left|\overset{\theta}{\underset{-\infty}{[z(t)]}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\mathrm{K}_{n,0} + \right.$$

$$+\sum_{s=1}^{r_n}\int_{\theta-n}^{\theta}\cdots\int_{\theta-n}^{\theta}\mathrm{K}_s\left[\tau_1-\theta,\ldots,\tau_s-\theta;z(\theta),z'(\theta),\ldots,z^{(p-1)}(\theta)\right]\times$$

$$\left.\times\zeta_{n,p}(\tau_1)\ldots\zeta_{n,p}(\tau_s)\,d\tau_1\ldots d\tau_s\right\},$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble C_p *de fonctions* $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$.

$\mathrm{K}_{n,0}$ est une constante; K_s une fonction continue par rapport à l'ensemble de ses $s+p$ variables.

Dans le cas où l'on ne considère que *des fonctions* $\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}$ *dont la dérivée d'ordre* p *est au plus égale, en valeur absolue, à un nombre positif* M, on peut simplifier l'expression précédente en écrivant $z^{(p)}(\tau)$ au lieu de $\zeta_{n,p}(\tau)$.

9. *Cas de convergence uniforme.* — Reprenons le cas d'une fonctionnelle continue d'ordre 0 satisfaisant à la condition du cycle fermé. Supposons, de plus, que les actions $z(t)$ ne puissent dépasser, en valeur absolue, un certain nombre positif M. Alors

$$(2)\quad \mathrm{U}\left|\overset{0}{\underset{-\infty}{[z(t)]}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\mathrm{K}_{n,0} + \right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{r_n}\int_{-n}^{0}\cdots\int_{-n}^{0}\mathrm{K}_{n,s}(t_1,\ldots,t_s)\,z(t_1)\ldots z(t_s)\,dt_1\ldots dt_s\right\}$$

$$(3)\quad \mathrm{U}\left|\overset{\theta}{\underset{-\infty}{[z(t)]}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\mathrm{K}_{n,0} + \right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{r_n}\int_{\theta-n}^{\theta}\cdots\int_{\theta-n}^{\theta}\mathrm{K}_{n,s}(\tau_1-\theta,\ldots,\tau_s-\theta)\,z(\tau_1)\ldots z(\tau_s)\,d\tau_1\ldots d\tau_s\right\}.$$

La convergence de la représentation (3) n'est généralement pas uniforme dans tout le domaine D des fonctions continues $\left|\overset{\theta}{\underset{-\infty}{z(t)}}\right| \leq \mathrm{M}$.

Elle l'est en même temps que celle de la représentation (2). Or j'ai étudié ce dernier problème dans ma Note du 1er mars (page 313), dans le cas où l'intervalle de variation de t est $(-\infty, \infty)$. On passe sans difficulté au

cas où cet intervalle est $(-\infty, 0)$. Finalement, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Soit* $\mathrm{U}\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z(t)]}}\right|$ *une fonctionnelle satisfaisant à la condition du cycle fermé, définie dans le domaine* D *des fonctions continues telles que* $\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{z(t)}}\right| \leq \mathrm{M}$. *Pour qu'elle admette une représentation* (3), *la convergence étant uniforme dans* D, *il faut et il suffit qu'étant donné* ε:

1°) *on puisse déterminer* l *et* η *positifs tels que, si l'on a, dans l'intervalle* $(\theta - l, \theta)$, $|z_1(t) - z_2(t)| < \eta$, *on ait*

$$\left|\mathrm{U}\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z_1(t)]}}\right| - \mathrm{U}\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z_2(t)]}}\right|\right| < \varepsilon ;$$

2°) *on puisse déterminer* l' *positif et une division de l'intervalle* $(-l', 0)$ *au moyen de points* $-l'_1, \ldots, -l'_p$, *de telle sorte que, si* $z_1(t)$ *et* $z_2(t)$ *ont la même valeur moyenne dans chacun des intervalles partiels* $(\theta - l', \theta - l'_1), \ldots, (\theta - l'_p, \theta)$, *on ait*

$$\left|\mathrm{U}\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z_1(t)]}}\right| - \mathrm{U}\left|\underset{-\infty}{\overset{\theta}{[z_2(t)]}}\right|\right| < \varepsilon .$$

Les conditions ainsi imposées à U, correspondent au cas où les actions ont une intensité limitée, où deux séries d'actions dont les intensités sont voisines depuis un temps assez long conduisent à des états actuels voisins, et où les actions oscillatoires à haute fréquence n'agissent que par leurs valeurs moyennes.

Matematica. — *Un limite inferiore dei moduli delle differenze tra le radici di due equazioni algebriche.* Nota di G. SANNIA, presentata dal Socio E. D'OVIDIO.

1. Siano

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 , \tag{1}$$

$$g(z) \equiv b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m = 0 , \tag{2}$$

due equazioni algebriche intere a coefficienti reali o complessi, non aventi radici comuni. Proponiamoci di cercare un limite inferiore μ dei moduli delle differenze tra le radici

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad ; \quad y_1, y_2, \ldots, y_m$$

delle due equazioni.

Consideriamo perciò il loro *risultante*

$$\mathrm{R} = \prod_{r,s}(x_r - y_s) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n \, ; \, s = 1, 2, \ldots, m) , \tag{3}$$

che è una funzione razionale dei coefficienti, perfettamente nota.

Detto A un numero maggiore dei moduli delle radici della (1) (1), e

(1) Tale è il massimo tra i numeri

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1, \left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_0}\right| + 1, \tag{a}$$

o un numero maggiore.

detto B un numero non minore dei moduli delle radici della (2), si ha

$$|x_r| < A \quad , \quad |y_s| \leq B ,$$

quindi

$$|x_r - y_s| \leq |x_r| + |y_s| < A + B ;$$

e dunque si sostituisce $A + B$ a ciascun fattore del prodotto

$$|R| = \prod_{r,s} |x_r - y_s| , \tag{4}$$

tranne che ad un sol fattore, si ottiene

$$|x_r - y_s| > |R| : (A + B)^{nm-1} .$$

Dunque: *il numero positivo*

$$\mu = |R| : (A + B)^{nm-1} \tag{5}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici delle due equazioni (1) (2), *prive di radici comuni.*

2. Supponiamo, in particolare, che la (2) sia l'equazione derivata della (1):

$$g(z) = f'(z) \equiv n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 , z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} = 0 . \tag{6}$$

Allora $m = n - 1$, R si riduce al *discriminante* D della (1), e come numero B, non minore dei moduli delle radici di (7), si può assumere lo stesso A [1]; dunque: *il numero positivo*

$$\nu = |D| : (2A)^{n(n-1)-1} \tag{7}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici di una equazione (1), *priva di radici multiple, e le radici dell'equazione derivata* (6).

3. Ciò vale, in particolare, quando si suppongono reali i coefficienti della (1). Allora vale pure il teorema di Rolle: « tra due radici reali consecutive α e β $(\alpha < \beta)$ della (1) cade un numero dispari di radici dell'equazione derivata ». Ora, per quanto precede, noi possiamo aggiungere che: *queste radici cadono tutte nell'intervallo più piccolo* $(\alpha + \nu , \beta - \nu)$, *ove* ν *è il numero* (7) [2].

[1] Poichè A, essendo non minore dei numeri (4), non è neppure minore dei numeri

$$\frac{n-1}{n}\left|\frac{a_1}{a_0}\right| + 1 , \frac{n-2}{n}\left|\frac{a_2}{a_0}\right| + 1 , \ldots , \frac{1}{n}\left|\frac{a_{n-1}}{a_0}\right| + 1 ,$$

e quindi non è minore dei moduli delle radici della (*a*).

[2] Un teorema analogo, enunciato da Laguerre e dimostrato dal Cesàro (Nouvelles Annales de math., 3ème série, tom. IV, pag. 328), dà per ν il valore $\frac{\beta - \alpha}{n}$. *Però esso suppone che le radici dell'equazione siano tutte reali.*

Ne segue subito che: *il numero*

$$\lambda = 2\nu = \sqrt{2|D|} : (2A)^{n(n-1)-1} \tag{8}$$

è minore dei moduli delle differenze tra le radici reali della (1) (1).

4. Ritornando al teorema generale del § 1, applichiamolo supponendo che l'equazione (2) sia di primo grado,

$$g(z) \equiv z - \alpha = 0 ,$$

con la radice α reale o complessa. Allora, per la (4), si ha

$$R = \prod_r |x_r - \alpha| = |f(\alpha)| : |a_0| ;$$

inoltre si può assumere $B = |\alpha|$.

Otteniamo così il teorema: *se* α *è un numero qualunque (reale o complesso) non radice dell'equazione* (1), *il numero positivo*

$$\mu(\alpha) = |f(\alpha)| : |a_0| (A + |\alpha|)^{n-1} \tag{9}$$

è minore dei moduli delle differenze tra il numero α *e le radici* x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *della* (1).

5. Questa proprietà della funzione $\mu(\alpha)$, suggerisce un nuovo *metodo di approssimazione* delle radici di una equazione algebrica. Per maggior chiarezza, lo esporremo sotto forma geometrica.

Incominciamo con l'osservare che nel piano rappresentativo della variabile complessa z, i punti x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, immagini delle radici della (1), saranno tutti contenuti nell'interno del cerchio Γ' che ha per centro il punto (origine) $z = 0$, e per raggio A.

Osserviamo inoltre che: *i punti* x_i *sono tutti esterni rispetto ad ogni cerchio* C_r *che abbia per centro un punto qualsiasi* α_r, *non radice di* (1), *e per raggio* $\mu(\alpha_r)$. Ciò non è che l'interpretazione geometrica del teorema del § 4.

Or prendiamo entro Γ', o sulla sua periferia, un punto α_1 e descriviamo il corrispondente cerchio C_1: esso staccherà da Γ' una regione Γ_1, tale che nel suo interno e sulla sua periferia non cadranno punti x_i. Sia Γ_1' la rimanente parte di Γ' (nella quale cadranno i punti x_i). Preso in Γ_1 o sul

(1) La conoscenza di un tal numero è utile nell'operazione della *separazione* delle radici reali della (1) col noto metodo di Waring-Lagrange. Allo stesso scopo Cauchy dette il numero analogo

$$\sqrt[n(n-1)-1]{|\Delta|} : (2A)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} ,$$

ove Δ indica pure il discriminante di (1), come D nella (8); però Δ differisce in generale da D per un fattore, potenza di a_0.

contorno (e precisamente sulla parte di contorno interna a Γ') un punto α_2, descriviamo il corrispondente cerchio C_2: questo staccherà eventualmente (1) da Γ_1' una parte che, aggregata a Γ_1, determinerà una regione più ampia Γ_2 che, come Γ_1, non conterrà punti x_i. Sia Γ_2' la rimanente regione di Γ' (nella quale cadranno tutti i punti x_i). Preso dentro Γ_2 o sul contorno un punto α_3, descriviamo il corrispondente cerchio C_3: esso staccherà eventualmente da Γ_2' una parte che, aggregata a Γ_2, determinerà una regione Γ_3, più ampia di Γ_2, e che, come questa, non conterrà punti x_i. E così via, con procedimento analogo a quello che si segue nella *prosecuzione analitica* delle funzioni di variabile complessa.

Si ha così una successione di regioni (tutte d'un sol pezzo) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, ciascuna contenente la precedente e tali che in esse (contorno incluso) mai cadono punti x_i.

Crescendo r, la regione Γ_r andrà estendendosi nel cerchio Γ' e (insinuandosi fra gli n punti x_i) tenderà a ricoprire tutto il cerchio Γ', ad eccezione dei punti x_i, i quali così finiranno per essere separati ed approssimati di quanto si vuole.

Ciò è quasi intuitivo; ma può dimostrarsi rigorosamente. A tal fine basterà dimostrare che: *dato ad arbitrio in Γ' (contorno incluso) un punto β, che non sia un punto x_i, esso è sempre raggiungibile con la costruzione precedente.*

Infatti, si congiunga il punto β col punto α_1 (punto iniziale della costruzione precedente) mediante una linea s tutta contenuta in Γ' e non passante per alcun punto x_i; poi si costruiscano, successivamente: la circonferenza C_1 corrispondente al punto α_1; la circonferenza C_2 corrispondente al punto α_2 ove C_1 incontra l'arco $\alpha_1\beta$ di s, la circonferenza C_3 corrispondente al punto α_3 ove C_2 incontra l'arco $\alpha_2\beta$ di s, ecc. Dico che, così procedendo, si finirà per incontrare un cerchio C_r contenente β nel suo interno o sulla sua periferia.

Infatti i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sono evidentemente legati da una relazione ricorrente, del tipo

$$\alpha_{r+1} = \alpha_r + \mu(\alpha_r)\, e^{i\varphi_r}, \tag{10}$$

ove $i = \sqrt{-1}$, e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sono numeri reali. Se con la costruzione precedente non si finisse per incontrare il detto cerchio C_r, la costruzione stessa si potrebbe continuare indefinitamente, ottenendo, su s, infiniti punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ susseguentisi (in questo ordine) sulla linea s nell'arco finito $\alpha_1\beta$. Questi punti ammetterebbero perciò un punto limite l (*giacente su s*); e, per la (10), si avrebbe

$$\lim_{r=\infty} \left[\mu(\alpha_r)\, e^{i\varphi_r} \right] = l - l = 0.$$

(1) Ciò accadrà certamente se α_2 si è preso sul contorno di Γ_1.

Ma $e^{i\varphi_r}$ è sempre finito e diverso da zero; dunque $\lim_{r=\infty} \mu(\alpha_r) = 0$, ossia, per la (9),

$$\lim_{r=\infty} \frac{|f(\alpha_r)|}{|a_0|(A+|\alpha_r|)^{n-1}} = \frac{|f(l)|}{|a_0|(A+|l|)^{n-1}} = 0,$$

cioè $f(l) = 0$. Dunque l coinciderebbe con un punto x_i, e quindi la curva s passerebbe per un punto x_i, contro l'ipotesi fatta.

6. La funzione $\mu(\alpha)$ può anche essere adoperata per approssimare le radici *reali* di un'equazione (1).

Infatti, dato un numero reale α_0, non radice della (1), si costruiscano le due successioni di numeri reali:

(11) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ove $\alpha_{r+1} = \alpha_r + \mu(\alpha_r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$

e

(12) $\alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ ove $\alpha_{r-1} = \alpha_r - \mu(\alpha_r)$ $(r = 0, -1, -2, \ldots)$.

Essendo la funzione $\mu(\alpha)$ sempre positiva, per α non radice di (1), la prima successione è crescente, e la seconda è decrescente, e però *entrambe tendono a limiti finiti o infiniti*, che diremo rispettivamente L ed l.

Supponiamo che L sia finito. Allora, ragionando sulla relazione ricorrente (11) come poc'anzi abbiamo fatto sulla (10), si riconosce che L è radice di (1). E siccome, per la proprietà della funzione $\mu(\alpha)$ (§ 4), nessuna radice di (1) può cadere negli intervalli $(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \ldots$, se ne deduce che L è la più piccola radice di (1) maggiore di α_0. Se ne deduce, inoltre, che, se $L = +\infty$, non vi è alcuna radice di (1) maggiore di α_0.

Analogamente si vede che: se l è finito, l è radice di (1), ed è la più grande radice che sia minore di α_0; se $l = -\infty$, non esistono radici di (1) minori di α_0.

Dunque, mediante le successioni (11) e (12), possiamo approssimarci alla radice immediatamente superiore ed alla radice immediatamente inferiore ad un numero reale dato, α_0.

Fisica. — *La compressibilità del cloruro di metile.* Nota di E. Bodareu, presentata dal Corrisp. A. Battelli (1).

Nel corso delle esperienze sulla costante dielettrica dei gas compressi si mostrò necessario conoscere la variazione della densità del cloruro di metile in funzione della pressione, ovvero la dipendenza del prodotto della pressione per il volume dalla pressione stessa.

Giacchè questa relazione fra le grandezze citate non si è trovata nella letteratura rispettiva, ho eseguito le misure relative per mezzo d'un apparecchio costruito nel modo seguente:

Una canna di vetro a grosse pareti ben graduata M è saldata nella parte superiore ad un tubo capillare ripiegato (vedi la figura) che alla sua volta è in comunicazione con un rubinetto di vetro R a tenuta di mercurio. La parte inferiore è invece saldata ad un'altra canna N, lunga circa 4 metri, che funziona come un ramo di manometro.

Il volume compreso fra i singoli tratti della canna M fino al punto del tubo capillare fu misurato con grandissima cura pensando con un'ottima bilancia di Nemetz il mercurio che occupava lo spazio tra i singoli tratti.

Il gas è stato fornito in bombole d'acciaio dalla Ditta Kahlbaum di Berlino colla garanzia di estrema purezza.

Le misure si eseguivano nel modo seguente:

Si cominciava a fare per mezzo di pompa di Gaede una grande rarefazione tanto nella canna graduata quanto nei tubi che ad essa comunicano attraverso il rubinetto R; poi aprendo il rubinetto della bombola si faceva entrare il gas. Ripetendo più volte la stessa operazione, si poteva essere sicuri d'avere scacciata completamente l'aria dalla canna M e d'averla sostituita col gas puro. Dopo si alzava adagio adagio l'imbuto T contenente il mercurio, finchè quest'ultimo non era salito, attraverso il rubinetto, nel tubo capillare fino al punto F; e finalmente si chiudeva il rubinetto R.

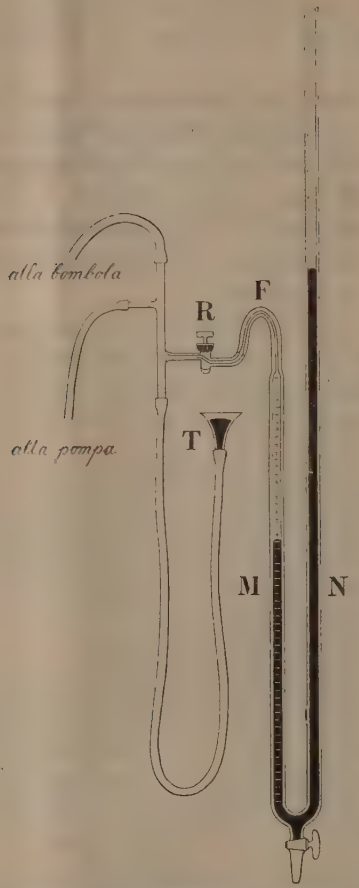
La pressione del gas così rinchiuso dentro la canna graduata si poteva variare a piacere aggiungendo del mercurio nel tubo N dal disopra, oppure togliendone dall'apparecchio per mezzo d'un altro rubinetto messo in basso come si vede nella figura.

La tenuta dei due rubinetti era perfetta.

La differenza di altezza delle due colonne di mercurio si leggeva per mezzo d'un cannocchiale fornito di una livella, sopra una scala verticale di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Pisa, diretto dal professore A. Battelli.

rame ottimamente graduata in millimetri, messa accanto all'apparecchio. Lo stesso cannocchiale permetteva quindi di leggere esattamente la posizione del menisco di mercurio dentro la canna guaduata.



La pressione barometrica era data da un Fortin.

Nella tabella che segue sono riportati i valori del prodotto pv alle pressioni corrispondenti (con p indicando la pressione e con v il volume del gas racchiuso).

TABELLA I.

Temperatura 16°.8 C.

Pressione in millimetr.	pv
760	1.0000
1200	0.9796
1650	0.9648
2100	0.9533
2800	0.9335

La seconda tabella mostra la variazione della densità del CH_3Cl in funzione della pressione (presa come unità quella del gas stesso a 760 mm. di pressione e a 16°.8 C.).

TABELLA II.

Pressione in millimetri	Densità
760	1.000
1200	1.679
1650	2.250
2100	2.898
2800	3.946

Riguardo all'approssimazione con cui si è ottenuto il valore del prodotto $p\,v$, osserviamo che i volumi dei singoli tratti della canna M furono determinati con un errore relativo minore di $^1/_{1500}$. Essendo poi l'errore relativo nella misura di p molto inferiore a quello di v, si può dire che i valori del prodotto $p\,v$ sono affetti da un errore che non supera 6 unità del 4° ordine decimale.

Fisica. — *Sulla misura assoluta dell'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Sebbene l'effetto Peltier fra metalli ed elettroliti sia un fenomeno di cui una completa teoria dell'elettrolisi dovrebbe render conto in ogni caso, e sebbene perciò sia anzitutto necessaria la conoscenza della sua intensità, cioè della quantità di calore prodottasi o scomparsa (indipendentemente dall'effetto Joule) quando l'unità d'elettricità passa da un metallo ad un elettrolito o viceversa, ben poche determinazioni dirette ed in misura assoluta si hanno di questa quantità.

Le determinazioni di Bouty e quelle di Gill dànno valori relativi e, se si considerano le importanti cause d'errore, si può anche dubitare che sia rigorosa la proporzionalità fra essi ed i valori assoluti. Le determinazioni basate sull'uso della formula di Hehlmotz $V = T\,dV/dT$ sono indirette e dovrebbero esser confermate, da un confronto con misure dirette, perchè la formula cesserebbe d'essere applicabile quando la condizione di riversibilità, che essa suppone, per una qualsiasi causa non si verificasse.

Avendo in alcune Note precedenti supposto e poi creduto di dimostrare, con un ragionamento teorico, che la differenza di potenziale V fra metallo ed eletttolito soddisfa alla relazione $V = (C - c)/e$ che vale certamente per

le coppie voltaiche complete, volli determinare c calore locale o effetto Peltier, per lo zinco a contatto d'una soluzione di ioduro la quale presenta all'incirca la stessa differenza di potenziale V come lo zinco a contatto della soluzione di solfato, mentre il calore di formazione C è, pei due sali, molto diverso.

Il metodo che ho seguìto in queste determinazioni, è quello solito, usato da Jahn: cioè ho fatto passare una stessa corrente per uno stesso tempo, dal metallo alla soluzione e viceversa, ed ho misurato in ciascun caso, e colle debite correzioni, le quantità di calore prodotte presso uno stesso elettrodo. Facendo la differenza di queste quantità di calore, l'effetto Joule, che è lo stesso nei due casi, viene eliminato, e l'effetto Peltier, che ha cambiato segno, rimane raddoppiato.

Speciali precauzioni sono necessarie, come ha indicato Jahn, per evitare che le differenze di densità prodotte dalle differenze di temperatura e da quelle (causate dall'elettrolisi) di concentrazione, producano per convezione un aumento o diminuzione erronee delle quantità di calore che si misurano.

Non ho potuto usare l'apparecchio di Jahn, anzitutto perchè, quando ho eseguito le esperienze non avevo e non potevo facilmente costruire lo speciale calorimetro di Bunsen occorrente; inoltre perchè questo richiede molto tempo per ogni esperienza, e specialmente per la preparazione dell'apparecchio, e per di più, quindi, moltissimo tempo avrebbe richiesto lo studio dell'apparecchio. Fu dunque necessario e mi parve anche utile di far uso di un apparecchio più facile a costruire in breve tempo ed altresì di uso più facile e più spedito, e che da quello di Jahn differisce solo perchè le misure calorimetriche sono tte col metodo detto delle mescolanze, ossia per riscaldamento della soluzione, invece che col metodo di Bunsen.

Questo apparecchio era composto di due bicchierini adiacenti, di vetro sottile, che contenevano ciascuno: 1°) uno stesso peso noto della soluzione; 2°) un elettrodo di zinco, uguale ed ugualmente disposto in entrambi; 3°) un agitatore; 4°) il bulbo di un termometro diviso in decimi di grado. La comunicazione elettrica fra questi due bicchierini funzionanti da calorimetri era ottenuta mediante un vaso rettangolare di vetro, basso, aperto superiormente, nel cui fondo erano stati fatti due fori, meno larghi dei bicchierini e cogli orli interni distanti circa 1 cm., nei quali fori erano stati masticiati due larghi e corti tubi di vetro, sporgenti all'esterno, cioè inferiormente, ed ivi chiusi da fondi di carta pergamena. Ottenevo facilmente una perfetta tenuta di questi fondi, spalmandone di grasso, prima di adattarli, la superficie interna dell'orlo, dimodochè, dopo adattati sulle superfici cilindriche dei tubi suddetti, le pieghe, che si erano necessariamente formate, rimanevano ripiene di grasso che veniva compresso ed immobilizzato dalla legatura, a molte spire, di spago.

Questo vaso conteneva una conveniente quantità di soluzione (circa 1 cm. sul fondo) e veniva collocato sopra i due bicchierini in modo che nella so-

luzione di ciascuno di questi pescasse o affiorasse il fondo di carta pergamena di uno dei tubi suddetti. Nell'interno di ciascuno di questi si trovava inoltre un agitatore ed il bulbo di un termometro le cui indicazioni potevano esser utili per il calcolo delle quantità di calore ricevute o perdute dai bicchierini sottostanti.

Per bene agitare la soluzione, condizione essenziale per queste determinazioni calorimetriche, usai prima i soliti agitatori ad anello, in numero di quattro, uno per ciascun calorimetro e per ciascuno dei tubi in essi pescanti; ma era difficile di ben regolare l'andamento di questi minuscoli agitatori, ed avveniva spesso che qualcuno di essi, andando ad urtare contro il termometro o contro le pareti, si fermasse o funzionasse male ed impedisse anche il regolare andamento degli altri.

Ricorsi allora ad una disposizione che ho proposto alcuni anni fà per agitare un liquido contenuto in recipienti ermeticamente chiusi, come p. es. nei termocalorimetri e nei dilatometri. Fissai cioè, normalmente, sulle pareti interne dei suddetti bicchierini e tubi, mediante ceralacca, alcune palette di mica, inclinate di 45° sulla verticale; inoltre, negli orli degli elettrodi cilindrici o circolari di lamina di zinco praticai colle forbici alcuni tagli parziali, longitudinali o radiali, e colle pinzette ripiegai di 45° uno dei labbri di ciascun taglio, sempre dalla stessa parte, in modo che formasse una paletta inclinata.

Inoltre, tutto l'apparecchio veniva fissato sopra uno dei soliti sostegni a tavolino, formati da un disco orizzontale portato da un'asta verticale che può ruotare (ed anche esser sollevata e fissata a varie altezze) entro un tubo portato da tre piedi. Attorno al disco avevo fissato inoltre una striscia di cartone formante un largo orlo verticale; e fissando ed avvolgendo su questo una funicella, tirando uno dei capi ed allentando l'altro a modo di redini, potevo far girare il disco e l'apparecchio in un senso o nell'altro.

Se, quando l'apparecchio è completamente immobile, lo si incomincia a far girare, le palette inclinate urtano sul liquido tuttora immobile, ed in parte lo spingono in giro e verticalmente; se si ferma l'apparecchio dopo che ha fatto, mettiamo, un giro, il liquido ancora in moto va ad urtare contro le palette immobili e viene di nuovo parzialmente deviato; se quindi si fa ruotare l'apparecchio in senso inverso, le palette urtano contro il liquido avente un senso di rotazione inversa, e ancora in parte lo deviano. Si può dunque rimescolare il liquido, sia facendo ruotare l'apparecchio in sensi opposti, sia facendolo ruotare sempre nello stesso senso (ciò che richiederebbe una fune continua) con fermate ad intervalli regolari (1).

(1) Credo che questo modo di agitare un liquido possa riuscire utile in alcuni casi, in sostituzione dell'agitatore ad anello, p. es. nella determinazione del calore specifico dei solidi col metodo delle mescolanze, perchè spesso avviene che il solido caldo, gettato nel calorimetro, imbarazza o anche impedisce del tutto il moto dell'anello.

Ho calcolato nel modo solito le quantità di calore guadagnate da ciascun calorimetro durante il passaggio della corrente, cioè ho moltiplicato l'equivalente in acqua del calorimetro, non tenendo conto del tubo che vi pescava, per l'aumento di temperatura che esso ha subìto dall'istante della chiusura del circuito sino a due minuti dopo l'apertura; con ripetute prove mi sono assicurato che questi due minuti erano sufficienti perchè il calore generato dalla corrente si ripartisse uniformemente in tutto il calorimetro.

A queste quantità di calore bisogna aggiungere quelle che ciascun calorimetro ha ceduto all'ambiente ed al tubo che vi pescava, o bisogna dedurle se il calorimetro le ha ricevute.

Ho operato perciò nel modo solito, cioè osservavo l'andamento dei 4 termometri per 10 minuti prima della chiusura del circuito, poi di 5 in 5 minuti durante il passaggio della corrente e poi per altri 10 o 20 minuti dopo l'interruzione della corrente.

Con questi dati sarebbe teoricamente possibile un calcolo molto esatto delle quantità di calore ricevute o perdute da ciascun calorimetro; nel fatto, siccome l'andamento dei termometri prima e dopo del passaggio della corrente non era molto regolare (forse per una causa a cui accennerò in seguito), e non potevo basarvi un calcolo rigoroso, mi contentai di supporre che, nella prima metà della durata della corrente aumentata di due minuti, per effetto dell'ambiente e del vaso di comunicazione persistesse la variazione di temperatura per minuto osservata prima della chiusura del circuito, e nella metà successiva si producesse la variazione media osservata a partire dai due minuti dopo l'interruzione della corrente.

Se con C_1, C_2 s'indicano le quantità di calore, corrette, prodotte dalla corrente in ciascun calorimetro, e con J_1 ed J_2 i rispettivi calori Joule e con $P_1 - P$ i calori Peltier, si avrà:

$$C_1 = J_1 + P \quad , \quad C_2 = J_2 - P \, .$$

Anche nei soliti bagni a doppia parete, nei quali gli anelli spesso scorrono imperfettamente, raschiando le pareti e producendo uno stridore sgradevole, si potrebbero agli anelli sostituire striscie d'ottone ad elica, continue o, meglio, profondamente dentate, saldate sopra una o entrambe le pareti dell'intercapedine e su quella del recipiente interno, e produrre l'agitazione molto più regolarmente nel modo indicato. Affinchè una striscia piana, non troppo larga, possa essere adattata e saldata sopra una superficie cilindrica, normalmente ad essa ed a 45° coll'asse, è necessario che questa striscia sia tagliata da una lamina piana con un raggio doppio di quello della superficie stessa. (Difatti, se in un punto della superficie cilindrica passano due eliche a $\pm 45°$ colla generatrice, e sia x il loro raggio di curvatura, e si fanno inoltre due sezioni normali, una secondo la generatrice di raggio infinito, l'altra ad angolo retto e di raggio r, sarà, pel teorema d'Eulero, $1/x + 1/x = 1/r$).

È però chiaro che il suddetto modo d'agitare un liquido non potrà essere usato se l'apparecchio è connesso rigidamente con apparecchi o con oggetti immobili.

Ripetendo l'esperienza colla corrente invertita, supponendo che la sua intensità col reostato o col calcolo sia ridotta la stessa, e che sia la stessa pure la sua durata, se indichiamo con C_1', C_2 le quantità di calore ora ottenute (avvertendo che ogni indice indica i valori d'uno stesso calorimetro) ed J_1', J_2' i corrispondenti calori Joule, si avrà

$$C_1' = J_1' - P \quad , \quad C_2' = J_2' + P ,$$

quindi

$$P = (C_1 - C_1')/2 = (C_2' - C_2)/2 .$$

Se i due calorimetri fossero in tutto identici, cosicchè il calore Joule fosse lo stesso in entrambi, basterebbe far passare la corrente in un solo senso, poichè si avrebbe:

$$P = (C_1 - C_2)/2 .$$

In questo ragionamento s'è supposto che nei due elettrodi il calore Peltier o locale abbia bensì segno diverso, ma lo stesso valore assoluto. Per assicurarsi che ciò sia esatto, gioverebbe usare un apparecchio più semplice, composto d'un solo calorimetro con due elettrodi molto vicini. Per effetto del passaggio d'una corrente, si avrà $C = J + P_1 - P_2$: e, dedotto J dalla resistenza e dalla intensità della corrente, si potrà ricavare $P_1 - P_2$.

Ho eseguito, ricercando le condizioni migliori, cercando di evitare le cause d'errore, molte determinazioni. Ho usato prima recipienti di lamina sottile d'ottone, ricoperti da uno spesso strato di vernice, perchè era facile di costruirli della forma e delle dimensioni volute: ma la vernice presto si screpolava o era intaccata, e fra l'ottone ed il liquido si producevano azioni chimiche con evidente deposito (o isolamento) di rame e con irregolarissima produzione di calore; ho usato anche calorimetri di lamina di zinco e poi finalmente di vetro, contenenti 100 oppure 50 cm.^{3} di soluzione.

Ho eseguito anzitutto, come prova del metodo, molte determinazioni con una soluzione di solfato di zinco puro contenente 143,5 di sale cristallizzato con 7 molecole d'acqua e 178,5 gr. d'acqua (ossia 25 % di sale anidro), la cui densità, misurata col densimetro, risultò, a 21°,5, uguale ad 1,296.

Ciascuno dei due bicchierini di vetro sottile (da cui era stato tagliato l'orlo) pesava 16 gr.; ciascun elettrodo di lamina di zinco amalgamato pesava 8 gr.; il volume della soluzione era di 49 cm.^{3}: quindi il peso 65 gr., e l'equivalente in acqua complessivo era circa 50 gr.

Nella seguente tabella trovasi in cima la temperatura iniziale dell'ambiente e l'indicazione degli elettrodi a cui le temperature sottostanti si riferiscono; nella 1ª colonna trovasi l'ora dell'osservazione dei termometri, nelle successive le temperature indicate dai termometri, a partire dalla temperatura iniziale suddetta, nell'ordine in cui si trovavano nell'apparecchio,

cioè la temperatura 1° in un calorimetro, 2° nel tubo che vi pesca, 3° nell'altro tubo, 4° nell'altro calorimetro; nell'ultima colonna trovansi le intensità della corrente in Ampère dall'istante della chiusura a quello dell'apertura del circuito.

Temperatura ambiente 22°,70.

	Catodo		Anodo		Ampères
h m	°				
XI 12	— 0,04	0,0	0,0	— 0,10	—
20	0,00	0,0	0,0	+ 0,07	0,139
25	+ 0,11	0,40	0,40	0,15	0,139
30	0,30	0,65	0,70	0,38	0,138
35	0,47	0,95	0,92	0,60	0,136
37	0,52	0,87	0,90	0,63	—
39	0,55	0,80	0,82	0,63	—
41	0,57	0,74	0,80	0,64	—
47	0,59	0,67	0,70	0,64	—
	Anodo		Catodo		
50	0,61	0,63	0,67	0,63	0,141
55	0,78	0,90	0,98	0,70	0,140
XII 0	0,99	1,20	1,20	0,85	0,140
5	1,20	1,40	1,44	1,00	0,140
7	1,22	1,40	1,42	1,02	—
9	1,22	1,30	1,33	1,03	—
11	1,22	1,25	1,30	1,05	—
15	1,19	1,14	1,20	1,06	—
20	1,15	1,02	1,07	1,02	—

I riscaldamenti direttamente osservati nei calorimetri catodico ed anodico sono stati rispettivamente di 0°,52 e 0°,70 nella 1ª determinazione, e di 0°,61 e 0°,39 nella 2ª: dimodochè le differenze dei riscaldamenti sono 0°,18 e 0°,22. L'andamento delle temperature dopo interrotta la corrente, non è stato molto regolare, dimodochè la correzione risulta diversa secondo che si fa in base alle variazioni prodottesi in due oppure in quattro ecc. minuti. A seconda del modo come si fa la correzione, la differenza dei riscaldamenti risultò di 0°,33; 0°,286; 0°,25; 0°,255; nella 1ª determinazione; e di 0°,23 0°,255; 0°,35; 0°,23 nella seconda. Ho preso come valore più probabile il valor medio 0,26: quindi la differenza della quantità di calore prodotta nei due calorimetri, ossia il doppio del calore Peltier, è di 13 calorie; e poichè la corrente d'intensità media 0,14 ha durato 900 secondi, si ha che la quantità di calore prodotta nel passaggio di 1 Coulomb dallo zinco alla soluzione, ed assorbita nel passaggio inverso, risulta di 52 milligrammi-calorie.

Altre determinazioni eseguite in condizioni svariate, comprendendo anche quelle meno ben riuscite, hanno dato i seguenti valori: 46,1; 60; 55,4; 41,3; 48,5; 58,4; 40,0; 35,5; 51,0; 46,0; la cui media è di 48,9 milligrammi calorie, valore poco diverso da quello trovato da Jahn.

Con una soluzione di ioduro di zinco, contenente 52 grammi di sale in 202,5 gr. d'acqua, avente la densità di 1,20 a 20°, ho ottenuto i seguenti valori: 37; 46,5; 46; 38; 39,4; 45,5; 45,2; 41: cioè, in media, 42 milligrammi calorie per Coulomb.

La differenza fra questo valore e quello trovato per la soluzione è molto piccola; non appare dunque che vi sia una relazione generale fra il calore Peltier e quello di formazione del sale, nè fra questo e la differenza di potenziale fra metallo e soluzione.

Come appare dai numeri sopra riferiti, i singoli valori del calore Peltier, tanto per una quanto per l'altra soluzione, non sono molto concordi, nonostante le molte prove fatte e le molte cure usate. Questo disaccordo potrebbe forse esser dovuto a ciò: che lo zinco elettrolitico deposto e gli elettrodi di zinco del commercio formavano una debole coppia voltaica la cui azione è difficile valutare ed era diversa nelle varie determinazioni. Prevedendo la possibile esistenza d'una tale causa d'errore, ho cercato rimediarvi amalgamando fortemente lo zinco, supponendo che lo zinco deposto per elettrolisi si sciogliesse nel mercurio o si amalgamasse: lo che invece non avveniva. Converrebbe quindi usare elettrodi di zinco puro.

Un'altra causa d'errore si ha negli scambî di calore fra i calorimetri ed i vasi di comunicazione, di cui non fu possibile di tenere un conto esatto. È forse possibile di evitare o almeno diminuire gli errori che ne risultano, aumentando la profondità della soluzione nel calorimetro anodico, ove si produce maggiore quantità di calore, diminuendola in quello catodico e regolando anche la quantità di liquido contenuto nel vaso di comunicazione in modo che gli aumenti di temperatura nei tre recipienti siano gli stessi, e quindi gli scambi di calore siano nulli o molto piccoli. È però chiaro che non si dovrebbe invertire la corrente, perchè il calorimetro con poco liquido, divenuto anodico, si riscalderebbe molto di più, quello con molto liquido si riscalderebbe molto di meno del vaso di comunicazione. Per ricavare il calore Peltier, si dovrebbe dunque aver cura che le resistenze dei due calorimetri, nonostante la diversa quantità di soluzione, fossero le stesse, e fossero quindi uguali i calori Joule, dimodochè fosse possibile far uso della suddetta formula $P = (C_1 - C_2)/2$ ottenibile senza invertir la corrente

Climatologia. — *La distribuzione stagionale e annuale della nebulosità in Italia.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Diversi studiosi, parlando della distribuzione della nebulosità in Europa, hanno quasi incidentalmente accennato al comportamento del fenomeno in Italia. E così Teisserenc de Bort (1) prese in esame le osservazioni raccolte in 21 città italiane dal 1870 al 1882; Elfert (2) esaminò i dati ottenuti in alcune città dell'Italia settentrionale e centrale dal 1864 al 1885. Si deve a Friedemann (3) uno studio più completo e più dettagliato sulla distribuzione della nebulosità in Italia, e difatti egli prese in esame le osservazioni rilevate in 140 città; però mentre per alcune città l'A. esaminò le osservazioni raccolte nel periodo 1879-1906, per altre considerò il periodo 1892-1896, e per altre le osservazioni estese fino al 1907. I valori così ottenuti hanno permesso di indicare, in un modo più completo di quello che non sia stato fatto fin'oggi, la distribuzione della nebulosità per mesi e per anno; ma siamo lontani dal considerare esaurito l'argomento, inquantochè i periodi presi in esame sono diversi e, come giustamente notò l'A., non si poterono ridurre ad una medesima epoca. E tanto più che gli eminenti studiosi Cantoni (4), De Marchi (5) e Roster (6) occupatisi in modo particolare del clima dell'Italia, si limitarono a dare cenni sommarii. Qualche anno prima che venisse alla luce lo studio del Friedemann, la Sezione climatologica del R. Ufficio centrale di meteorologia in Roma aveva iniziato un esame delle numerose osservazioni nefoscopiche raccolte in Italia e in una Memoria, che presto sarà pubblicata negli Annali di meteorologia, sarà dato ampio e minuto conto del materiale di osservazioni finora raccolto; ed è sembrato più adatto, per uno studio generale della nebulosità in Italia, sottoporre ad esame un periodo di anni ugualmente esteso per le diverse località, e precisamente il periodo 1891-1910.

(1) Teisserenc de Bort., *Distribution de la nebulosité à la surface du globe.* Annales du Bureau central météorologique de France, vol. IV, 1884.

(2) Elfert P., *Die Bewölkung in Mitteleuropa mit Einschluss der Karpotenländer.* Petermanns Mitteilungen, 36 Band., 136-145, 1890.

(3) Friedemann I., *Bewölkung und Sonnenschein des Mittelmeergebietes.* Archiv. der deutschen Seewarte, XXXV: Jarhgang, 1913.

(4) Cantoni P., *Il clima d'Italia*, estratto dal giornale: L'Italia agricola, Milano, 1881.

(5) De Marchi L., *Il clima d'Italia. La terra* di G. Marinelli, vol. IV.

(6) Roster G., *Climatologia dell'Italia.* Torino, 1909.

In riguardo alla distribuzione della nebulosità per stagioni, il Friedemann non se ne occupa, e nei varii trattati di climatologia si trovano notizie limitate. De Marchi nota come la nebulosità settentrionale varii in inverno da 50 a 60 %, nell'estate da 30 a 40 %, e nell'Italia meridionale da 20 a 30 %. Parlando delle particolarità climatiche delle singole regioni, nota come in Lombardia, mentre al piano la stagione più serena è l'estate e la più nuvolosa l'inverno, nella regione dei laghi è invece sereno anche l'inverno e nuvoloso l'autunno. Roster dice che la stagione più nuvolosa è l'inverno, e la maggiore serenità si verifica nell'estate. Egli aggiunge che a questa regola generale fa eccezione però la regione subalpina, dove la primavera è più nuvolosa dell'inverno. Nella regione alpina e nella valle del Po si notano, durante l'anno, due massimi e due minimi: i due massimi nelle stagioni medie, primavera e autunno; i due minimi nell'estate e nell'inverno. col minimo dei minimi in estate. Il Roster nota ancora come la distribuzione stagionale della nebulosità si comporti in modo diverso nei luoghi continentali e nei luoghi marittimi; così, mentre a Udine la nebulosità risulta presso a poco distribuita nella medesima misura nelle quattro stagioni, a Palermo grande è la differenza fra l'estate e l'inverno, e piccola fra le stagioni medie.

Con la presente Nota ci proponiamo di rendere più particolareggiata la distribuzione stagionale di un sì interessante elemento climatico; e a tale intento diamo conto dei valori spettanti ai quattro aggruppamenti stagionali

$$\left(J = \frac{D+G+F}{3}, P = \frac{M+A+M}{3}, E = \frac{G+L+A}{3}, A = \frac{S+O+N}{3}\right)$$

utilizzando i valori mensili dati nel su accennato studio (in corso di stampa) per 132 città. L'unita tabella contiene tali elementi per le diverse città disposte per latitudine decrescente.

Distribuzione della media annua della nebulosità.

Fig. 1.

Distribuzione dell'amplitudine annua.

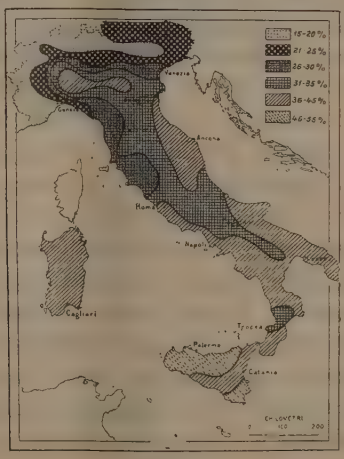


Fig. 2.

Nebulosità a seconda delle stagioni meteorologiche

CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	CITTÀ	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
Auronzo	40	53	49	44	Piacenza	57	49	33	54	Scandicci	54	50	30	45	Benevento	66	58	31	51
Stelvio	41	57	59	59	Moncalieri	43	51	42	54	Pisa	54	52	31	47	Caserta	48	47	22	39
Sondrio	36	47	38	45	Asti	45	44	35	50	Vallombrosa	56	58	39	52	Montevergine	68	56	32	53
Belluno	53	67	62	59	Alessandria	52	41	25	50	Urbino	62	58	34	57	Avellino	63	52	26	43
Domodossola	41	54	47	51	Ferrara	61	55	38	55	Ancona	73	61	42	63	Napoli	50	47	22	39
Udine	53	61	48	51	Parma	60	55	38	57	Livorno	55	54	35	49	Portici	52	47	23	42
Conegliano	45	52	40	43	Novi Ligure	52	44	33	53	Castelnuovo G.	51	53	37	46	Torre del Greco	47	40	15	34
Varallo	38	54	47	51	Correggio	54	50	33	48	Arcevia	60	52	32	55	Ischia	53	47	23	40
Como	42	49	39	49	Bra	48	51	41	55	Iesi	64	51	34	54	Sassari	62	57	31	53
Valdobbia	42	62	61	53	Reggio Emilia	60	53	38	55	Arezzo	55	54	33	49	Potenza	69	62	36	55
Oderzo	50	55	42	50	Modena	60	56	39	56	Siena	53	50	27	44	Caggiano	62	52	28	45
Bassano	42	48	37	43	Fossano	47	55	46	56	Massa Marittima	52	52	31	46	Castellaneta	51	47	22	42
Bergamo	52	53	45	57	Bologna	55	49	32	50	Macerata	58	50	32	51	Deserto M. L.	56	53	27	45
Picco S. Bern.	39	51	44	46	Genova	52	57	44	52	Fermo	68	62	33	58	Pomarico	52	48	26	42
Treviso	56	58	44	52	Ravenna	58	44	24	48	Camerino	67	60	34	58	Lecce	57	48	21	45
Salò	45	51	38	43	Cuneo	39	50	42	52	Perugia	59	58	38	52	Montemurro	59	53	29	46
Biella	37	47	39	46	Savona	42	46	33	42	Pienza	64	65	45	57	Gallipoli	54	44	19	41
Vicenza	50	50	37	48	Chiavari	48	49	33	45	Ascoli P.	53	49	25	45	Cosenza	58	42	20	41
Brescia	51	51	37	51	Bargone	40	40	26	38	Teramo	56	50	31	51	Tiriolo	67	66	43	54
Novara	51	48	32	47	Sestola	51	55	44	55	Viterbo	53	54	34	51	Cagliari	54	47	17	44
Spinea	54	56	38	50	Forlì	62	55	38	57	Chieti	52	46	30	46	Pizzo	56	45	31	38
Milano	62	57	46	61	Cesena	57	47	30	52	Aquila	58	55	33	50	Tropea	58	52	31	46
Desenzano	46	45	31	44	Spezia	45	47	28	42	Avezzano	47	45	24	41	Oppido M.	61	53	31	49
Verona	52	48	34	48	Alassio	39	42	27	37	Tivoli	52	54	28	45	Messina	62	50	25	47
Venezia	63	60	48	59	Pistoia	56	57	37	52	Roma	56	54	28	48	Reggio Calabria	61	48	20	45
Padova	55	54	39	51	Pesaro	62	51	30	54	Agnone	57	50	33	50	Palermo	64	51	21	47
Vigevano	54	48	34	52	Pescia	54	57	34	50	Velletri	59	48	19	40	Trapani	70	57	22	54
Pavia	62	54	40	60	Porto Maurizio	42	41	32	42	Ceccano	56	56	29	49	Riposto	53	46	19	46
Mantova	52	39	25	45	Prato	57	57	36	50	M. Cassino	51	53	30	44	Catania	53	46	20	46
Mirandola	58	47	30	48	Lucca	55	56	34	51	Foggia	64	52	31	50	Caltanissetta	58	37	10	37
Cremona	62	55	41	58	Sant'Agata	56	47	27	51	Roccamonfina	47	48	23	37	Girgenti	60	49	21	47
Torino	48	51	43	54	Camaldoli	69	67	45	63	Elena	53	49	21	42	Mineo	46	37	14	35
Rovigo	66	57	45	58	Firenze	56	54	32	48	Bari	60	48	25	46	Siracusa	61	53	25	53

Tenuto conto del valore raggiunto nelle diverse stagioni, notiamo come la stagione con maggiore nebulosità cada in inverno per le località della val Padana, del versante Adriatico, del medio e basso versante tirrenico e del versante Jonico. Nelle località dell'alto versante tirrenico e in quelle prossime alle Alpi invece la stagione con maggiore nebulosità è la primavera. Tale diverso comportamento rispetto alle regioni vicine, appare più distinto sul Veneto a causa dei molti luoghi di osservazioni disseminati nelle varie situazioni orografiche. Nelle località appenniniche poste in speciali condizioni orografiche — quali Vallombrosa, Viterbo, Montecassino, Agnone, Pienza, Tivoli — la maggiore nebulosità succede in primavera; cosicchè, tale spostamento dell'epoca del massimo di nebulosità dall'inverno alla primavera

può interpretarsi con una maggiore facilità che offrono i rilievi alla condensazione del vapore d'acqua. Le località alpine quali Stelvio, Auronzo, Valdobbia, Domodossola, hanno il massimo di nebulosità in estate, epoca in cui vengono a intensificarsi le correnti ascendenti sulla molto riscaldata val Padana. Passando a considerare la stagione con minore nebulosità, notiamo che essa suole essere l'inverno per le regioni alpine o per quelle poste sotto la diretta influenza di tali sistemi orografici, e l'estate per il rimanente. Le stagioni intermedie, primavera e autunno, mostrano un andamento non ovunque uniforme.

Se consideriamo la successione delle diverse stagioni a seconda della maggiore nebulosità, notiamo come per le località dell'Italia superiore prossime alla catena degli Appennini, per quelle situate al centro della val Padana e per quelle prospicienti al versante del medio Adriatico, le stagioni si succedono in quest'ordine: inverno, autunno, primavera, estate.

Per le località settentrionali e centrali sottoposte alle influenze orografiche si ha la seguente successione: primavera, inverno, autunno, estate; oppure: primavera, autunno, inverno, estate. Per le regioni meridionali, situate lungo la dorsale appenninica o costiere, abbiamo invece la successione: inverno, primavera, autunno, estate. A tale distribuzione generale fanno eccezione alcune località, invero limitate, ove due stagioni vicine hanno il medesimo valore. Adunque in linea generale abbiamo un andamento stagionale che ricorda all'ingrosso quello indicato dalle osservazioni pluviometriche, ma se ne discosta un po' per le località settentrionali e specialmente per quelle della valle Padana. Ricordiamo che quivi le pioggie presentano due massimi annuali in primavera e in autunno, mentre nel caso della nebulosità l'autunno si presenta con maggiore nebulosità di quanto si riscontra in primavera e si discosta poco di quanto si nota in inverno.

Completiamo le notizie fin'ora esposte con l'esame della distribuzione annuale, i di cui valori, qui appresso riportati, sono stati ottenuti effettuando la media delle cifre relative alle stagioni. E facciamo anche seguire i valori dell'amplitudine ossia della differenza tra il valore del mese più nuvoloso e quello del mese più sereno.

Nebulosità annua e amplitudine annua

CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine	CITTÀ	Anno	Amplitudine
Auronzo	47	28	Pavia	54	36	Cesena	47	37	Perugia	52	31	Potenza	56	42
Stelvio	52	23	Mantova	40	37	Spezia	40	38	Pienza	58	30	Caggiano	47	42
Sondrio	42	14	Mirandola	46	37	Alassio	36	20	Ascoli	48	38	Castellaneta	40	36
Belluno	60	22	Cremona	54	32	Pistoia	51	27	Teramo	47	35	Deserto M. L.	45	38
Domodossola	48	17	Torino	49	21	Pesaro	49	43	Viterbo	48	30	Pomarico	42	31
Udine	53	21	Rovigo	57	32	Pescia	49	30	Chieti	43	32	Lecce	42	44
Conegliano	45	19	Piacenza	48	38	P. Maurizio	40	20	Aquila	49	33	Montemurro	47	38
Varallo	48	22	Moncalieri	49	20	Prato	50	33	Avezzano	39	33	Gallipoli	39	44
Como	45	20	Asti	43	24	Lucca	49	30	Tivoli	45	33	Cosenza	40	46
Valdobbia	55	27	Alessandria	42	42	Sant'Agata	45	42	Roma	47	36	Tiriolo	58	33
Oderzo	49	22	Ferrara	52	35	Camaldoli	61	35	Agnone	47	33	Cagliari	41	45
Bassano	42	16	Parma	52	33	Firenze	48	35	Velletri	39	37	Pizzo	40	40
Bergamo	53	24	Novi Ligure	46	38	Scandicci	45	37	Ceccano	48	36	Tropea	47	33
Picco S. Bern.	45	14	Correggio	46	30	Pisa	46	31	M. Cassino	45	34	Oppido M.	48	37
Treviso	52	23	Bra	49	23	Vallombrosa	51	27	Foggia	49	43	Messina	46	43
Salò	45	24	Reggio Emilia	52	34	Urbino	52	38	Roccamonfina	39	34	Reggio Calabria	43	49
Biella	42	15	Modena	53	33	Ancona	60	39	Elena	41	40	Palermo	46	50
Vicenza	46	21	Fossano	51	19	Livorno	48	30	Bari	45	44	Trapani	51	55
Brescia	48	24	Bologna	46	35	Castelnuovo G	47	25	Benevento	51	42	Riposto	41	40
Novara	44	34	Genova	51	19	Arcevia	50	39	Caserta	39	34	Catania	41	42
Spinea	50	25	Ravenna	43	44	Iesi	51	38	Montevergine	50	44	Caltanisetta	36	56
Milano	57	28	Cuneo	46	20	Arezzo	47	30	Avellino	45	43	Girgenti	44	53
Desenzano	42	27	Savona	41	17	Siena	44	35	Napoli	40	36	Mineo	43	37
Verona	45	31	Chiavari	44	23	Massa Marittima	46	32	Portici	41	37	Siracusa	48	46
Venezia	57	26	Bargone	36	23	Macerata	48	38	Torre Greco	34	38			
Padova	50	27	Sestola	51	18	Fermo	56	41	Ischia	41	35			
Vigevano	47	36	Forlì	53	39	Camerino	55	46	Sassari	51	39			

La figura 1ª indica la distribuzione geografica della nebulosità annua e risulta che la minima nebulosità risiede all'estremo del versante meridionale della Sicilia, e che valori più elevati, ma sempre nella categoria dei minimi, si riscontrano nelle località del versante orientale della Sicilia, della Sardegna e della penisola Salentina, mentre spostandosi verso nord si hanno valori via via crescenti che raggiungono cifre elevate lungo la dorsale appenninica, le Alpi e nella maggior parte della val Padana. Spostandosi dal centro della valle Padana verso le Alpi, si individualizzano zone di minore nebulosità, che scompaiono di mano in mano che ci avviciniamo alle alte cime; siffatte zone hanno valori poco diversi da quelli che si incontrano nelle città costiere delle località peninsulari. L'andamento di tali zone segue l'orografia della regione, cosicchè le troviamo più estese nella parte della val Padana che costituisce il passaggio dal Veneto all'Emilia.

L'alto e medio versante Adriatico hanno nebulosità superiore a quella che si nota nelle corrispondenti località del versante tirrenico; e specie la Li-

guria risalta per la minima nebulosità della riviera occidentale e di quella orientale, nebulosità che è quasi identica a quella che si riscontra nelle località marittime meridionali. Nel rimanente versante Adriatico e in quello Tirrenico predomina piuttosto uniformità, che perdura per tutto l'estremo peninsulare. La regione appenninica si mantiene costantemente con nebulosità superiore a quella delle corrispondenti località costiere. E infine in Sicilia al versante tirrenico deve attribuirsi nebulosità alquanto superiore a quella dei rimanenti versanti e specialmente del versante meridionale.

Seguendo la distribuzione dei valori relativi all'amplitudine (fig. 2ª), si ha come sulle regioni peninsulari e insulari, sul basso versante Adriatico e sul centro della val Padana, risiedano i più elevati valori. Dal centro della val Padana verso le regioni alpine si succedono zone con minore amplitudine, fino ai rilievi più elevati che divengono sede dei più piccoli valori. Nelle località peninsulari la regione appenninica si distingue per un'elevata amplitudine che raggiunge cifre poco diverse da quelle che si incontrano nella regione della valle Padana prossima alla centrale. I versanti Adriatico e Tirrenico presentano caratteri diversi, specie nelle alte e medie regioni; difatti, per il primo si hanno valori elevati sulle coste che divengono minori a misura che ci si avvicina alla catena degli Appennini, mentre sulle coste tirreniche si riscontrano minimi valori che divengono più elevati con l'avvicinarsi alla catena appenninica. È da rilevare la minima amplitudine della Liguria, e specialmente quella della riviera occidentale, che è quasi identica alla nebulosità dei luoghi alpini più elevati. Le rimanenti regioni dei due versanti hanno valori quasi identici fra di loro e piuttosto elevati.

Sul versante Jonico l'amplitudine si mantiene elevata; e tale rimane sul versante orientale siculo, mentre aumenta in Sardegna e sul versante tirrenico-siculo ove si riscontrano i valori più ragguardevoli.

Tenuto conto della quantità che la nebulosità raggiunge nell'anno e dell'amplitudine, sembra adunque che per l'Italia si possa procedere alla seguente distinzione in zone:

- zona settentrionale
  - regione centrale
  - regione prealpina
  - regione alpina
- zona tirrenica
  - regione superiore
  - regione centrale
  - regione inferiore
- zona appenninica
- zona jonica
- zona adriatica
  - regione superiore
  - regione centrale
  - regione inferiore
- zona sicula
  - regione orientale
  - regione occidentale

E riassumendo i caratteri delle singole zone, possiamo dire come nella zona settentrionale, la regione centrale ha elevata nebulosità e elevata amplitudine; la regione prealpina, minore nebulosità e minore amplitudine; la regione alpina elevata nebulosità e amplitudine inferiore a quella notata

nella regione precedente. Nella zona appenninica la nebulosità nell'anno è superiore a 50 %, e l'amplitudine oscilla da 31 % a 35 %. Nella zona adriatica la nebulosità raggiunge nelle regioni superiori e centrali valori superiori a 50 % mentre nelle regioni inferiori i valori variano da 40 a 45 %. L'amplitudine è elevata (da 46 a 55 %) nelle regioni centrali e inferiori, e da 26 a 35 % nelle alte regioni. Nella zona tirrenica le alte regioni rappresentate dalla Liguria, hanno minima nebulosità e minima amplitudine: le regioni centrali si differiscono dalle corrispondenti adriatiche per una minore nebulosità e minore escursione; e le regioni inferiori, pur avendo nebulosità quasi uguale a quella delle corrispondenti località adriatiche, hanno più intensa amplitudine annua. La zona jonica ha minima nebulosità ed elevata amplitudine; e tali particolarità si estendono per tutto il versante orientale siculo, mentre il versante siculo settentrionale possiede nebulosità più elevata e amplitudine annua più intensa; quivi notiamo i valori più ragguardevoli.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'azione di nitrati isolati sul periodo germinativo dell'Avena sativa* (1). IV Nota preventiva del dott. F. Plate, presentata dal socio R. Pirotta.

In tre Note precedenti (2) ho brevemente esposto i risultati ottenuti circa l'azione di nitrati solubili — appartenenti respettivamente al I°, II°, III° e IV° gruppo del sistema periodico degli elementi — sul periodo germinativo dell'*Avena sativa.*

In quest'ultima Nota vengo ad esporre i risultati ottenuti con i nitrati Cr e U del VI° gruppo, con il nitrato di Mn del VII° gruppo, e quelli di Fe, Co, Ni dell'VIII° gruppo. In ultimo poi riepilogherò i risultati complessivi ottenuti per questa prima serie di ricerche.

Nitrato di cromo. — Il Cr, benchè presenti nel suo comportamento chimico molta analogia con il Mn, è stato oggetto di pochissime ricerche, fatta eccezione del bel lavoro del Koenig, il quale trovò che gli ioni del cromo agiscono nell'ordine $Cr^{\cdot\cdot} < Cr^{\cdot\cdot\cdot} < Cr\,O_4'''$, in cui vediamo come all'anione competa la funzione più nociva (3). Dalle mie ricerche risulta che il comportamento e l'azione specifica del Cr allo stato di ione trivalente si avvicinano moltissimo a quelli del manganese. Vi è inoltre da notare che il cromo anche si accumula allo stato ossido nella radice in maggior quantità; ma nel

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Vedi questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., II° fascic., pag. 598; 12° fascic., pag. 728, (1913); e vol. XXIII, 1° sem., fasc. 3°, (1914).

(3) Per mancanza di spazio, la media dei risultati ottenuti per il Cr e Mn è riportata nelle tabelle riassuntive finali della presente Nota.

germoglio ho potuto anche constatare la sua presenza, il che corrisponderebbe anche ai risultati ottenuti dal Koenig, che lo ha trovato in quantità minore nel germoglio che non nella radice, ma sempre presente. Quando comunicherò i risultati delle mie ricerche quantitative, allora tornerò a parlare più diffusamente sopra questo interessante catione.

Nitrato di uranile. — Esito mortale per tutte le piantine.

Nitrato di manganese. — Il nitrato manganoso ha dato risultati analoghi ma migliori di quelli ottenuti per il cromo.

Solo le due prime soluzioni riescono mortali, mentre dalla $^{N}/_{200}$ ricomincia ad avere un graduale sviluppo che diventa normale alle concentrazioni $^{N}/_{1600}$ e $^{N}/_{3200}$, ove quindi anche il rapporto correlativo fra germoglio e radice ha valore positivo. Siccome però in studii come questi è necessario di tenere conto di ogni circostanza, mi piace far rilevare, che, prima di tutto, i due cationi esaminati hanno nei loro rispettivi nitrati una valenza diversa ($Cr^{\cdots}$ e $Mn^{\cdot\cdot}$), cioè sono rispettivamente trivalente e bivalente; che essi hanno un peso atomico quasi uguale, e ricordano nel loro curioso comportamento i cationi $Rb^{\cdot}$ e $Sr^{\cdot\cdot}$, di cui esposi già i risultati nelle mie precedenti Note.

Nitrati di ferro, cobalto e nickel. — Per il nitrato di ferro adoperai quello in cui il $Fe^{\cdots}$ funziona da catione trivalente: i risultati ottenuti furono negativi per tutte le concentrazioni adoperate.

Qui è anche da tenere presente che le soluzioni dei sali ferrici reagiscono acide, a causa della loro idrolisi, la quale poi è tanto maggiore quanto maggiore è la diluizione delle soluzioni. Onde, come già feci rilevare a causa dell'idrolisi, non ci troviamo in presenza solo del sale, ma anche d'un acido e d'una base.

Per i nitrati di cobalto e nickel ho avuto sempre risultati completamente negativi.

Riepilogo.

In questa prima serie delle mie ricerche intorno, all'azione di nitrati sul periodo germinativo dell'*Avena sativa*, come ho già detto, ho seguito l'ordine del sistema periodico degli elementi. Però le mie ricerche si sono limitate ad un numero ristretto di nitrati, e precisamente a quelli più caratteristici di ogni gruppo. E prenderò separatemente in considerazione: I° il peso; 2° lo sviluppo del germoglio; 3° lo sviluppo della radice; 4° lo sviluppo correlativo.

1° *Il peso.* — Il peso della pianta fresca varia moltissimo a seconda delle soluzioni di nitrato adoperate, ed a seconda delle concentrazioni di questo. Anzi posso dire che si verifica come regola press'a poco costante che coll'aumentare della diluizione cresce in proporzione anche il peso si da provocare una vera curva ascendente e di percorso abbastanza regolare: ben inteso che questo vale solo per quelle soluzioni che non sono di effetto

mortale per la pianta. Nel seguente quadro sintetico sono esposti i risultati ottenuti per il peso

	N/50	N/100	N/200	N/400	N/800	N/1600	N/3200	Totale	Controllo 140 dist.
I° gruppo									
KNO_3 gr.	—0.6440	—0.0358	0.1940	0.1580	0.1810	0.2234	0.2928	0.7744	0.2784
$RbNO_3$ »	0.0146	6.0254	0.1386	0.1562	0.1516	0.1734	0.1786	0.8384	0.2894
$CrNO_3$ »	—0.0672	—0.0454	—0.0216	0.0315	0.0672	0.1084	0.1192	0.1921	0.2898
$NaNO_3$ »	—0.0568	—0.0324	0.0200	0.1234	0.1976	0.9230	0.2714	0.7282	0.2780
$LiNO_3$ »	—0.0496	—0.0184	0.0280	0.0450	0.1376	0.1358	0.1290	0.3822	0.3004
$(NH_4)NO_3$ »	—0.0734	—0.0522	—0.0324	0.0222	0.0372	0.0482	0.0596	0.0092	0.2834
$Cu(NO_3)_2$ »	—0.0260	—0.0216	—0.0168	—0.0094	—0.0086	—0.0052	—0.0040	—	—
$AgNO_3$ »	—0.0170	—0.0124	—0.0078	—0.0060	—0.0024	—0.0022	—0.0018	—	—
I° gruppo									
$Ba(NO_3)_2$ »	—0.2160	—0.0142	—0.0112	—0.0032	0.0216	0.0366	0.0532	0.1114	0.2764
$Cu(NO_3)_2$ »	—0.0034	0.0874	0.0906	0.1186	0.1504	0.1782	0.1828	0.8080	0.2542
$Sr(NO_3)_2$ »	—0.0136	—0.0150	0.0329	0.0418	0.1206	0.1252	0.1346	0.4694	0.2644
$Mg(NO_3)_2$ »	—0.0314	—0.0246	—0.0108	0.0072	0.0106	0.0210	0.0290	0.0678	0.3008
$Zn(NO_3)_2$ »	—0.0228	—0.0190	0.0276	0.0402	0.0464	0.0500	0.0564	0.2206	0.2516
$Cd(NO_3)_2$ »	—0.0564	—0.0574	—0.0508	0.0566	0.0682	0.0308	—0.0148	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—0.0754	—0.0692	—0.0402	0.0492	0.0440	0.0368	—0.0318	—	—
III° gruppo									
$Al(NO_3)_3$ »	—0.0074	—0.0066	—0.0018	0.0184	0.0322	0.0418	0.0492	0.1258	0.2452
IV° gruppo									
$Sn(NO_3)_2$ gr.	—0.0182	—0.0142	—0.0044	—0.0028	0.0114	0.0522	0.0862	0.1102	0.2284
$Ce(NO_3)$ »	—0.0362	—0.0342	—0.0304	—0.0264	—0.0192	—0.0134	—0.0092	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—0.0254	—0.0216	—0.0084	0.0072	0.0218	0.0532	0.0746	0.1014	0.2556
$Th(NO_3)_2$ »	—0.0492	—0.0454	—0.0382	0.0360	—0.0304	—0.0226	—0.0206	—	—
VI° gruppo									
$Cr(NO_3)_3$ »	—0.0112	—0.0062	—0.0022	0.0082	0.0322	0.0848	0.1894	0.3150	0.2784
$UO_2(NO_3)_2$ »	—0.0268	—0.0234	0.0212	—0.0194	—0.0164	—0.0138	—0.0120	—	—
VII° gruppo									
$Mn(NO_3)_2$ »	—0.0062	—0.0014	0.0174	0.0244	0.0648	0.1744	0.2156	0.4890	0.2182
VIII° gruppo									
$Fe(NO_3)_3$ »	—0.0244	—0.0214	—0.0196	—0.0164	—0.0148	—0.0124	—0.0118	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—0.0254	—0.0226	—0.0208	—0.0194	—0.0182	—0.0152	—0.0134	—	—
$Ni(NO_3)_2$ »	—0.0258	—0.0234	—0.0218	—0.0204	—0.0188	—0.0166	—0.0144	—	—

Partendo dal concetto che anche risultati negativi possono concorrere a meglio spiegare un'ipotesi scientifica, così ho creduto opportuno aggiungere anche i risultati per quei cationi che si sono dimostrati di effetto mortale. Vediamo appunto anche che le perdite di peso subite dalle piantine diminuiscono a mano a mano che dalle soluzioni più concentrate possiamo a quelle più diluite, e questa graduale diminuzione lascia prevedere come

si debba poter arrivare ad un limite, in cui il catione benchè in minima quantità, può essere benissimo sopportato dall'organismo vivente.

2° *Lo sviluppo del germoglio.* — In generale posso dire che la soluzione $^{N}/_{50}$ riesce di esito mortale per tutti i nitrati adoperati fatta eccezione per il nitrato di rubidio. Anche qui lo sviluppo del germoglio migliora a mano a mano che dalle soluzioni più concentrate si passa a quelle meno concentrate. Ecco il quadro sintetico dei risultati ottenuti per il germoglio in cui sono riportate le medie degli accescimenti per ogni soluzione

	$^{N}/_{50}$	$^{N}/_{100}$	$^{N}/_{200}$	$^{N}/_{400}$	$^{N}/_{800}$	$^{N}/_{1600}$	$^{N}/_{3200}$	Controllo in H_2O dist.
I° gruppo								
KNO_3 cm.	—	—	6.4	8.9	11.7	12.4	11.8	11.5
$RbNO_3$ "	5.7	5.9	5.8	6.2	6.7	6.5	8.5	13.6
$CrNO_3$ "	—	—	—	2.1	3.6	3.9	5.3	12.7
$NaNO_3$ "	—	—	5.8	7.3	10.9	12.6	11.9	12.2
$LiNO_3$ "	1.7	3.2	4.9	6.7	6.6	8.2	9.9	14.1
$(NH_4)NO_3$ "	—	—	—	3.5	7.3	8.9	7.8	12.6
$Cu(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
$AgNO_3$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
II° gruppo								
$Ba(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	6.1	10 8	15.7	15.7
$Ca(NO_3)_2$ "	—	11.7	14.7	15.5	17.9	15.4	17.3	16.6
$Gr(NO_3)_2$ "	—	6.3	8.2	8.0	7.4	9.8	10.2	16 4
$Mg(NO_3)_2$ "	—	—	—	1.3	3.6	6.5	9.4	16.8
$Zn(NO_3)_2$ "	—	—	—	5.7	7.1	8.5	10.9	16.2
$Cd(NO_3)_2$ "	—	—	1.9	—	—	—	—	—
$Hg(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
III° gruppo								
$Al(NO_3)_3$ "	—	—	—	2.1	2.6	3.5	4.6	16.1
IV° gruppo								
$Gn(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	4.1	5.6	5.4	14.3
$Ce(NO_3)_3$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
$Pb(NO_3)_2$ "	—	—	—	0.9	1.4	3.2	5.3	11.3
$Th(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
VI° gruppo								
$Cr(NO_3)_3$ "	—	—	—	1.0	2.5	8.6	11.8	18.3
$UO_2(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
VII° gruppo								
$Mn(NO_3)_2$ "	—	—	1.7	2.5	5.4	11.3	14.7	17.3
VIII° gruppo								
$Fe(NO_3)_3$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
$Co(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	—	—	—	—
$Ni(NO_3)_2$ "	—	—	—	—	—	—	—	—

Come si vede dalla tabella i metalli alcalini sono quelli che esercitano l'azione migliore nelle piantine à cui seguono poi quelli alcalino terrosi: tutti gli altri cationi si distanziano moltissimo da quelli ora menzionati.

3° *Lo sviluppo della radice.* — Nel quadro che segue sono esposti i risultati medii complessivi ottenuti per l'accrescimento della radice:

	$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$	Controllo in H_2O dist.
I° gruppo								
KNO_3 cm.	—	—	8.3	12.1	18.2	12.9	8.5	18.2
$RbNO_3$ »	6.0	6.8	7.2	6.7	8.4	6.9	9.4	17.5
$CrNO_3$ »	—	—	—	3.0	0.7	0.4	1.5	16.4
$NaNO_3$ »	—	—	4.5	3.0	7.2	19.3	19.8	15.7
$LiNO_3$ »	—	—	—	5.2	4.7	6.3	6.4	17.1
$(NH_4)NO_3$ »	—	—	—	1.8	2.9	5.5	5.2	14.8
$Cu(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$AgNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
II° gruppo								
$Ba(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	5.1	7.2	9.1	17.5
$Ca(NO_3)_2$ »	—	4.2	12.5	15.9	18.3	19.9	20.1	18.7
$Sr(NO_3)_2$ »	—	7.5	8.7	14.2	20.3	20.1	21.8	20.6
$Mg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	1.4	1.9	3.2	19.3
$Zn(NO_3)_2$ »	—	—	1.3	1.7	3.5	4.0	11.2	19.6
$Cd(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
III° gruppo								
$Al(NO_3)_3$ »	—	—	—	2.3	2 9	3.7	4.8	11.3
IV° gruppo								
$Sn(NO_3)_4$ »	—	—	—	—	2.8	3.7	5.7	16.6
$Ce(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—	—	—	0.5	1.2	3.1	4.7	17.3
$Th(NO_3)_4$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
VI° gruppo								
$Cr(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	4.3	9.8	10.3	13.5
$UO_2(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	14.1
VII° gruppo								
$Mn(NO_3)_2$ »	—	—	3.2	4.7	7.8	9.4	11.6	14.9
VIII° gruppo								
$Fe(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Ni(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—

Anche qui sono i cationi alcalini che danno i risultati migliori, a cui seguono quelli alcalino terrosi: gli altri si distanziano da essi.

4° *Sviluppo correlativo.* — Come già ebbi a dire nella mia prima Nota, nello studio delle azioni dei diversi elettroliti non basta di controllare

peso, dimensioni etc. ma bisogna soprattutto considerare i rapporti che passano fra i diversi organi, vale a dire studiare i rapporti correlativi in cui questi organi si trovano. Siccome poi nel caso da me preso in esame le piantine di avena durante il periodo germinativo, ed in soluzione acquosa hanno lo sviluppo migliore, e quindi normale, quando la radice è più lunga del germoglio, così viene a stabilirsi un rapporto fra accrescimento della radice e accrescimento del germoglio: nel caso normale il rapporto è positivo, in quello anormale è negativo. Nella tabella seguente sono riuniti i risultati dei rapporti ottennti:

	$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$	Controllo in H_2O dist.
I° gruppo								
KNO_3 cm.	—	0.9	1.9	3.2	6.5	0 5	— 3.3	6.7
$RbNO_3$ »	0.3	—	1.4	0.5	1.7	0.4	0.9	3.9
$CsNO_3$ »	—	—	—	—	— 2.9	— 3.5	— 3 8	3.7
$NaNO_3$ »	—	—	— 1.3	— 7.4	— 3.7	6.7	7.9	3.5
$LiNO_3$ »	—	—	—	—	— 1.5	— 1.9	— 3.5	3.0
$(NH_4)NO_3$ »	—	—	—	— 1.7	— 4.4	— 3 4	— 2.6	2.2
$CuNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$AgNO_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
II° gruppo								
$Ba(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	1.1	— 3.6	— 6.6	
$Ca(NO_3)_2$ »	—	— 7.5	— 2.2	0.4	0.4	4.5	2.8	2.1
$Sr(NO_3)_2$ »	—	1.2	0.5	6.2	12.9	10.3	11.6	4.2
$Mg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	— 2.2	— 4.6	— 6.2	2.5
$Zn(NO_3)_2$ »	—	—	— 0.6	— 4.0	— 3.6	— 4.5	0.3	2.4
$Cd(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Hg(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
III° gruppo								
$Al(NO_3)_3$ »	—	—	—	0.2	0.3	0.2	0.2	4.8
IV° gruppo								
$Sn(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	— 1.3	— 1.9	3.0	2.3
$Ce(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Pb(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	— 0.2	— 0.1	— 0.6	4.9
$Th(NO_3)_4$ »	—	—	—	—	—	—	—	
VI° gruppo								
$Cr(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	— 1.8	— 1.2	1.5	4.8
$UO_2(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
VII° gruppo								
$Mn(NO_3)_2$ »	—	—	— 1.5	—	— 2.4	1.9	3.1	2.4
VIII° gruppo								
$Fe(NO_3)_3$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Co(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—
$Ni(NO_3)_2$ »	—	—	—	—	—	—	—	—

Tenendo dunque conto dello sviluppo correlativo. i cationi possono venire classificati come segue:

$$\underset{85.45}{Rb} > \underset{87.63}{Sr} > \underset{39.10}{K} > \underset{40\,07}{Ca} > \underset{23.00}{Na} > \underset{6.94}{Li} > \underset{24.32}{Mg} > [\underset{54.93}{Mn} > \underset{52.0}{Cr}] > \underset{65.37}{Zn} > \underset{27.1}{Al}$$

Questi 11 cationi sono dunque quelli che meglio vengono sopportati dalle piantine nel periodo germinativo da me studiato: ben inteso però che anche qui si hanno delle proprietà biologiche specifiche proprie per ognuno di essi. Intanto è da osservare che il peso atomico di questi elementi varia fra un massimo di 87.63 (Sr) ed un minimo di 6.94 (Li), quindi si mantiene piuttosto basso. Dippiù è da notare il parallelismo curioso che passa fra lo Sr ed il Rb da una parte ed il Mn e Cr dall'altra; questo parallelismo si rivela non solo nelle proprietà biologiche ma anche nel peso atomico, che sono pressochè uguali.

Ho constatato per tanto questo fatti; però per la loro ulteriore conforma ho naturalmente bisogno di molti altri dati sperimenrali, che verrò esponendo in seguito.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli Anfibî all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni: importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria.* Nota I di Bruno Brunacci [1], presentata dal Socio L. Luciani.

Dalle ricerche di L. Fredericq [2] relative all'influenza dell'ambiente esterno sulla composizione salina del sangue di alcuni animali acquatici. risultò già il differente comportamento di alcuni invertebrati marini rispetto a quello di alcuni vertebrati, nel senso, cioè, che, mentre l'*ambiente interno* [Cl. Bernard [3]] dei primi varia col variare di quello *esterno*, nei secondi invece « le milieu intérieur, constitué par le sang, s'isole plus ou moins du milieu extérieur dans le quel vit l'animal ».

È tuttavia noto che solo con l'estesa e sistematica applicazione dei metodi d'analisi fisico-chimica (concentrazione molecolare e conducibilità elettrica) ai liquidi di *animali marini* appartenenti alle varie classi d'invertebrati e vertebrati, il Bottazzi [4] potè per il primo stabilire come la

[1] Ricerche eseguite nell'Istituto fisiologico di Siena.

[2] L. Fredericq, Bull. Ac. roy. de Belgique, IV, 1882; Arch. d. zool. expér. et générale, III, 1885.

[3] Cl. Bernard, *Leçons sur les phénomènes de la vie*, 1878; *Introd. à l'étude de la méd. expérim.*, 1865.

[4] F. Bottazzi, Arch. ital. d. biol., 28, 1897; Arch. di fisiol., III, 1906, e V, 1908; Ergebn. d. Physiol., VII, 1908.

indipendenza relativa dell'ambiente interno da quello esterno s'inizî coi *Teleostei*.

In base alle ricerche del Bottazzi ed a quelle di successivi ricercatori [Quinton (1), Fredericq (2), Rodier (3), Dekhuizen (4), Dakin (5) ecc.] l'Höber (6), propose di distinguere gli animali, a seconda dei loro poteri di regolazione osmotica (analogamente a quanto si era fatto per la regolazione termica), in *animali pecilosmotici* ed *animali omeosmotici*. Ai primi apparterrebbero tutti quelli che uniformano la concentrazione molecolare dei loro liquidi interni a quella dell'acqua del mare nel quale vivono (invertebrati e vertebrati, fino ai teleostei esclusi); mentre farebbero parte dei secondi tutti gli animali che possiedono una propria e caratteristica concentrazione interna, indipendente da quella esterna (dai Teleostei, inclusi, ai Mammiferi).

Relativamente agli *animali d'acqua dolce*, essi si comportano diversamente da quelli marini.

Qui, infatti, anche gli *Invertebrati* possiedono una pressione osmotica superiore a quella dell'ambiente esterno [cfr. Bottazzi (7), Höber (8), E. M., P. Widmark (9), Backman (10)]. Ciò vale anche pei *Vertebrati* (Anfibî, Teleostei, Rettili) [cfr. Bottazzi e Ducceschi (11)].

Dalle esperienze di varî ricercatori è poi resultato che alcuni invertebrati di acqua dolce possono adattarsi a vivere anche in acqua salata, e che ciò avviene con perdita di peso [perdita di acqua, P. Bert (12)]. [Cfr. F. S. Beudant (13), H. Eisig (14), P. Bert (15)].

Così pure è noto che in alcuni *pesci ossei* (es. Anguilla), la di cui pressione osmotica del sangue ascende circa alla metà di quella del mare ambiente, la concentrazione sanguigna diminuisce considerevolmente allorchè

(1) Höber, Pysikalische Chemie d. Zelle u. d. Gewebe, 3. Aufl., 1911.

(2) Fredericq L., Bull. Ac. roy. de Belgique 1898, 1901, 1902, 1911; Arch. de Biol. XX, 1904; Arch. int. de Physiol. XI, 1911.

(3) Dakin, Bioch. Journ., III, 1908.

(4) Dekhuizen, Arch. néerland., *10*, 1905.

(5) Rodier, Trav. d. la stat. zool. d'Arcachon, 1899.

(6) Quinton, Compt. rend. Soc. biol., *51*, 1899; *57*, 1904. Compt. rend. Ac. d. sc., *131*, 1900.

(7) Bottazzi, Arch. di fisiol., III, 1906.

(8) Höber, loc. cit.

(9) E. M. P. Widmark, Zeitschr. f. allg. Physiol., X, 1910.

(10) Backman, Zentralbl. f. Physiol., XXV, 1911; Pflüger's Arch., *149*, 1913.

(11) Bottazzi e Ducceschi, Archiv. ital. d. biol., XXVI, 1896.

(12) P. Bert, Compt. rend. Soc. biol., III, 1873; Compt. rend. Ac. d. sc., *97*, 1883; Compt. rend. Soc. biol., *37*, 1885.

(13) F. S. Beudant, Ann. d. chemie et d. physique, II, 1816.

(14) H. Eisig, Fauna u. Flora d. golfes von Neapel, XVI, 1887.

(15) P. Bert., loc. cit.

passano nell'acqua dolce [Quinton (1)]; ed inversamente che, ponendo un'anguilla, il cui sangue congeli a — 0°,57, dall'acqua dolce, in acqua del mare (del nord, $\Delta = 1°,9$) il sangue stesso aumenta nella sua concentrazione fino a congelare a $\Delta = 0°,745$, cioè raggiunge il valore medio trovato per il sangue dei Teleostei marini, senza tuttavia pervenire alla concentrazione del mare [Dakin (2)].

Circa gli *Anfibî*, esistono numerose ricerche antiche e recenti, eseguite sia su la pelle della rana staccata dall'organismo [Matteucci e Cima (3), Reid (4), Bayliss (5)], sia sull'animale vivente [Cl. Bernard (6), Emery (7), P. Bert (8), Spina (9), Semper (10), Ružička (11), Traube-Mengarini (12) Durig (13), Overton (14)], le quali dimostrano la permeabilità della loro pelle nelle due direzioni e la possibilità che questi animali hanno di perdere, per evaporazione, fino al 25-30 % del proprio peso, per aumentarlo poi di nuovo immergendoli in acqua od in soluzioni saline.

I resultati ottenuti non sono tuttavia molto concordi, nè per ciò che concerne la pelle staccata dal corpo, nè per ciò che si riferisce alla cute dell'animale vivente. Infatti, mentre, per il primo caso, Matteucci e Cima osservano un passaggio maggiore delle sostanze disciolte dalla faccia interna della pelle verso quella esterna, e Reid nota una corrente maggiore di liquido dall'esterno all'interno, Bayliss invece, pur constatando un passaggio di liquido e di sostanze disciolte in entrambe le direzioni, non osserva una maggiore velocità di diffusione a favore dell'una piuttosto che dell'altra parte.

Anche relativamente alla permeabilità della pelle dell'animale vivente, i resultati sono alquanto diversi, poichè, mentre da varî ricercatori (Spina, Ružička, Durig ecc.) è ammessa la permeabilità per l'acqua e per i sali nelle due direzioni, pur notando una caratteristica differenza tra la pelle dell'animale morto e quella del vivo; da altri (Overton) è invece asserita la permeabilità nelle due direzioni soltanto per l'acqua e le sostanze solubili

(1) Quinton, Compt. rend. Soc. biol. *57*, 1904.
(2) Dakin, loc. cit.
(3) Matteucci e Cima, Ann. d. chemie et d. physique, XIII, 1845.
(4) Reid, Journ. of Physiology, 1890.
(5) Bayliss, Bioch. Zeitschr., XI, 1908.
(6) Cl. Bernard, loc. cit.
(7) Emery, Ann. d. sc. natur., XII, 1869.
(8) P. Bert, Compt. rend. Ac. d. sc., *73*, 1871; Compt. rend. Soc. biol. III, 1873; Compt. rend. Ac. d. sc., *97*, 1883.
(9) Spina, *Ueber Resorption u. Secretion*, Leipzig, 1882.
(10) Semper, *Die natürlichen Existenzbeding. d. Thiere*, Leipzig, 1880 (Brockhaus)
(11) Ružička, Wiener med. Blätter, Jahrg., *18*, 1898.
(12) Traube-Mengarini, Rend. Acc. Lincei, *5*, 1896.
(13) Durig, Pflüger's Arch., *85*, 1901.
(14) Overton, Verhandl. d. physik. med. Gesell. zu Würzburg, 1904.

nei lipoidi, e, in confronto a questa, la quasi impermeabilità per le sostanze insolubili nei lipoidi.

Tutte le ricerche relative alla permeabilità della pelle degli Anfibî eseguite sull'animale vivente, sono state fatte desumendole dalla variazione in peso del loro corpo immerso in acqua e nelle più svariate soluzioni di cristalloidi elettroliti e non elettroliti, sia dopo aver fatto subire all'animale vivo una perdita in peso del 25-30 %, per evaporazione, sia nell'animale normale. Nell'un caso come nell'altro, le ricerche sono state fatte a cloaca aperta ed a cloaca chiusa, e tanto a circolazione sanguigna funzionante ed a sistema nervoso centrale integro, quanto a circolazione sanguigna abolita (asportazione del cuore) ed a sistema nervoso distrutto (Spina).

I primi a determinare la concentrazione molecolare del sangue degli Anfibî desumendola dall'abbassamento del punto di congelazione del loro siero, furono Bottazzi e Ducceschi (1896) [1] i quali ottennero i valori seguenti:

Rana escul. (siero) $\Delta = 0°,563$,
Bufo viridis (») $\Delta = 0°,761$ (?).

Questi numeri sembrarono troppo elevati ad Hamburger [2]; ed il Bottazzi stesso, in successive ricerche [3], pur ritenendo esatti i valori precedentemente trovati per la rana, credette che quelli relativi al *Bufo viridis* fossero effettivamente errati. In queste ricerche successive egli ottenne:

per la *Rana escul.* (siero) $\Delta = 0°,435$
$x_{30°} = 119 \times 10^{-4}$
» » » (urina) $\Delta = 0°,170$
$x_{30°} = 45 \times 10^{-4}$ (?)
per il *Bufo vulgaris* (siero) $\Delta = 0°,445$
$x_{30°} = 121 \times 10^{-4}$
» » » (urina) $\Delta = 0°,155$
$x_{30°} = 29 \times 10^{-4}$.

Nell'esposizione delle nostre esperienze vedremo che il supposto errore del Bottazzi corrisponde invece a quanto effettivamente si verifica in determinate circostanze di vita di questa classe di animali (ibernazione), e che l'opinione di Hamburger non era quindi esatta.

Dalla conoscenza di questi dati e da quella delle ricerche precedentemente ricordate (dalle quali già risultava la possibilità negli Anfibî di aumentare o diminuire il proprio peso per assunzione o perdita d'acqua), nonchè

(1) Bottazzi e Ducceschi, loc. cit.
(2) Hamburger, Osmotischer Druck ecc., I, 460, 1902.
(3) Bottazzi, Arch. di Fisiol., III, 1906.

dalle mie ricerche (1) sul riflesso tonico diffuso, ottenuto appunto nella rana escul. sottraendo acqua dal sistema nervoso centrale, sia per evaporazione (soggiorno dell'animale a sistema nervoso centrale scoperto, sotto una campana di vetro con acido solforico bollito), sia per iniezione sottocutanea di soluzioni saline ipertoniche, fui indotto ad eseguire le presenti ricerche dal punto di vista della regolazione osmotica di questi animali. Mi sembrò infatti non privo d'interesse uno studio sistematico sull'adattamento degli Anfibî all'ambiente liquido esterno, variando la concentrazione di questo e determinando coi metodi fisico-chimici quella dei loro liquidi interni; mentre nello stesso tempo cercavo di indagare il meccanismo di questa regolazione.

Le esperienze precedenti fatte col metodo della pesata dell'animale non mi sembravano d'altro canto adatte per un più preciso studio del fenomeno che mi proponevo di indagare.

Un riassunto dei principali resultati ottenuti da me nella primavera-estate del 1911 fu già comunicato il 6 ottobre 1911 a Torino in occasione della 1ª Riunione della Soc. ital. di biochimica (2), e successivamente in Roma alla 5ª Riunione della Soc. ital. per il progresso delle scienze il 16 ottobre 1911 (3). Da quell'epoca sono state eseguite ricerche nello stesso senso da Backman e Sundberg (4) le quali sostanzialmente ripetevano quelle di Durig e di Overton fatte per pesata, e confermavano in parte le mie.

Riferirò ora in successive Note i particolareggiati resultati delle mie esperienze.

Esse sono state eseguite nella *Rana esculenta* in *periodo estivo* ed in *periodo d'ibernazione*, prendendo in esame:

1°) i limiti dell'adattamento;

2°) i fenomeni che si osservano negli animali immersi in acqua distillata ed in soluzioni saline ipertoniche;

3°) la concentrazione molecolare e la conduttività elettrica dei loro liquidi interni, nonchè il contenuto degli stessi in sostanze organiche, inorganiche ed in N totale

4°) il tempo entro il quale la regolazione osmotica avviene;

5°) l'importanza dei sacchi linfatici e della vescica urinaria;

(1) Brunacci B., Zeitschr. f. Allg. Physiol., IX, 1908.

(2) Brunacci B., Atti della Soc. ital. d. biochimica, 1ª Riunione, Torino, 6-8 ottobre 1911. Ed. Stucchi e Ceretti, Milano, pp. 170-172.

(3) Idem, Atti Soc. ital. p. il progresso d. scienze, 5ª Riunione, Roma, 12-18 ottobre 1911, pp. 880-883; Acc. fisiocritici, Siena, 1912; Zentralbl. f. Physiol., XXV, 1911; Pflüger's Arch, *150*, 1912; *153*, 1913; Arch. ital. de biol., *58*, 1912.

(4) Backman e Sundberg, Zentralbl. f. Physiol., XXV, 1911; Pflüger's Arch. *148*, 1912; *151*, 1913.

6°) i fenomeni che si osservano negli animali immersi in soluzioni saline isotoniche ed ipotoniche;

7°) l'influenza della temperatura;

8°) l'influenza della pressione barometrica.

A) Rana esculenta (estiva).

1°) *Ricerca del limite massimo di adattamento.*

Il primo quesito che mi proposi di risolvere, fu quello relativo al *limite massimo* di adattamento compatibile con la vita.

Allestii perciò sette soluzioni di Ringer [1] contenenti progressivamente grammi 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 °/₀₀ di Na Cl ciascuna, e gli altri sali ($K Cl$, $Ca Cl_2$, $Na HCO_3$) in proporzione; e ne misi tre litri in ciascuno dei sette recipienti, nel quale posi cinque rane il più possibilmente eguali per peso e grandezza, preventivamente asciugate con un panno.

Tutte queste rane, portate da poco in Laboratorio, erano state tenute per alcuni giorni in acqua di condotta cambiata tre volte al giorno, allo scopo di eliminare dal loro canale digerente ogni residuo di alimento. Gli animali in esperimento furono tenuti sempre in una stanza sotterranea annessa all'Istituto, la quale non subiva oscillazioni notevoli di temperatura nelle varie ore della giornata, e nei varî mesi dell'anno; ed era completamente allo scuro.

Esperienza I

(3 giorni di permanenza. Temperatura ambiente, circa, 12° C.).

Soluzioni Ringer contenenti gr.	9	10	11	12	13	14	15	NaCl °/₀₀
20-V-1911 ore 8,30 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	
» » 11,30 . . .	»	»	»	»	»	»	1+	
» » 13 . . .	»	»	»	»	»	1+		
» » 16 . . .	»	»	»	»	»	1+	1+	
» » 17 . . .	»	»	»	»	»	2+	2+	
» » 18,30 . . .	»	»	»	»	1+	1+	1+	
21-VI-1911 » 9 . . .	»	»	1+	1+	4+	—	—	
» » 11,20 . . .	»	»	»	1+	—	—	—	
» » 16 . . .	»	»	»	1+	—	—	—	
» » 17,30 . . .	»	»	»	1+	—	—	—	
» » 19 . . .	»	»	1+	»	—	—	—	
22-VI-1911 » 8 . . .	»	»	»	1+	—	—	—	
» » 11 . . .	»	»	1+	—	—	—	—	
23-VI-1911 » 8,30 . . .	5 vive	5 vive	2 vive	5 morte	5 morte	5 morte	5 morte	Sospeso l'esperimento

[1] Si è usata la soluzione di Ringer, anzichè soluzioni semplici di Na Cl, per ovviare alle conseguenze dannose di queste ultime [cfr. J. Loeb, Pflüger's Arch. *80*, 1900, *88*, 1902; Micheels, Arch. intern. de Physiol. *4*, 1906-907.

Esperienza II

(4 giorni di permanenza; si tralascia la soluzione 15 °/₀₀. Temperatura, circa, 12° C.).

Soluzioni Ringer contenenti gr.	9	10	11	12	13	14	NaCl °/₀₀
23-VI-1911 ore 11 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	
» » 17,30 . . .	»	»	»	»	»	2 +	
24-VI-1911 » 8 . . .	»	»	»	»	»	3 +	
» » 9,30 . . .	»	»	»	»	1 +	—	
» » 10,30 . . .	»	»	»	»	1 +	—	
» » 16,30 . . .	»	»	»	»	»	—	
» » 18 . . .	»	»	»	»	1 +	—	
25-VI-1912 » 11 . . .	»	»	»	1 +	»	—	
26-VI-1911 » 11 . . .	»	»	»	2 +	2 +	—	
27-VI-1911 » 11 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	2 vive	5 morte	5 morte	Sospeso l'esperimento

Esperienza III

(5 giorni di permanenza; si tralascia la soluzione 14 °/₀₀. Temperatura, circa, 12° C.).

Soluzioni Ringer contenenti gr.	9	10	11	12	13	NaCl °/₀₀
28-VI-1911 Ore 9 . . .	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	5 vive	
29-VI-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	2 +	5 +	
30-VI-1911 » 9 . . .	»	»	»	3 +	—	
1-VII-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	—	—	
2-VII-1911 » 9 . . .	»	»	1 +	—	—	
3-VII-1911 » 9 . . .	5 vive	5 vive	2 vive	5 morte	5 morte	Sospeso l'esperimento

Da queste esperienze risultò dunque che la soluzione Ringer contenente l' 11 °/₀₀ di Na Cl era sempre troppo concentrata sebbene in essa talora le rane potessero resistere in vita parecchio tempo (Esp. II). Si ritenne perciò come *limite massimo la soluzione Ringer contenente il* 10 °/₀₀ di Na Cl, mentre la soluzione 11 °/₀₀ poteva considerarsi *ultra-massima.* Come *limite minimo* si scelse, naturalmente, l'acqua distillata.

Biologia. — *Ulteriori osservazioni sulle relazioni degli organi e sulla nutrizione con tiroide di Mammiferi nell'accrescimento larvale e nella metamorfosi degli Anfibî Anuri.* Nota II [1]. del dott. G. Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

Nel prosieguo delle mie osservazioni sull'influenza della nutrizione con tiroide di Mammiferi nelle larve di Anuri, ho voluto vedere il comportamento della tiroide degli animali sperimentati.

È noto, per alcuni lavori pubblicati sull'argomento, che la tiroide tenderebbe a reagire sotto l'influenza del regime: le ricerche in proposito sono, però, tutt'ora controverse. Chalmers Watson asserisce che una nutrizione costituita esclusivamente con carne produce nei ratti ipertrofia della tiroide [2]: Le osservazioni di Watson hanno però incontrato obiezioni (Thompson, Porsyth) [3]; nè, ricordando ciò che si riscontra nei mammiferi, si può ritenere accertata l'influenza dell'inanizione (Thompson, Missiroli).

In quanto poi all'azione della tiroide, parrebbe, dalle ricerche di Lanz (1895, citato da Vincent), che iniezioni sottocutanee di estratto di tiroide tenderebbero a produrre atrofia della glandula.

La maggior parte delle mie osservazioni si riferisce a larve nutrite con tiroide, appartenenti all'esperimento VII (Cotronei, 1913, pag. 31).

La tiroide, pari, risulta costituita da piccole vescicole, contenenti colloide: ma la tiroide è assai meno sviluppata e le vescicole assai inferiori al massimo sviluppo raggiunto dalle vescicole di esemplari nutriti diversamente e esaminati nella stessa fase biologica, subito dopo l'emissione di un arto anteriore. Tenendo conto di tutti i fattori, osserviamo che le larve nutrite con tuorlo d'uovo di gallina, carne di bue, o sviluppate in condizioni naturali, hanno raggiunto dimensioni assai più cospicue; mentre è noto che le larve nutrite con tiroide, presentano un accrescimento assai più esiguo; siccome in larve allevate con migliore regime di nutrizione, ma in fase meno inoltrata d'accrescimento, si riscontra un sempre meno cospicuo sviluppo della tiroide, mi sembra logico, prima di ogni altra considerazione, porre in relazione il

(1) Vedi questi Rendiconti, pag. 458.

(2) Watson, C., *On the influence of a meat diet on the tyroid glands.* Yournal of Pysiol. 1904, pag. 31, 1906 pag. 34.

(3) Con ulteriori ricerche, Missiroli (Arch. di Fisiol., vol. X, 1912) ha riconosciuto che la nutrizione con sostanze albuminoidi fa riscontrare nei cani iperfunzione della tiroide, mentre coi grassi e con idrati di carbonio non si notano modificazioni osservabili all'esame istologico.

deficiente sviluppo della tiroide in larve nutrite con tiroide di mammiferi, con il deficiente accrescimento raggiunto.

Ulteriori osservazioni, eseguite con rigorose indagini di controllo, ci diranno fino a qual punto il regime possa negli Anfibî influire sul comportamento della tiroide. Per le poche e controverse cognizioni in proposito, l'argomento merita di essere studiato; e giustamente S. Vincent (1) dichiara (pag. 334) « the whole subject of physiological changes in the thyroid under varying conditions is urgently in need of systematic investigation ».

Osservato che l'intensa influenza di una nutrizione con tiroide di Mammiferi si manifesta come causa disarmonica oltre che acceleratrice, è interessante, ricordare alcune esperienze di Wintrebert (2). Questo ricercatore, in 2 esperienze successive, ha tolto dall'acqua dei girini di *Rana temporaria* e li ha messi al fondo di un grande cristallizzatore chiuso, su uno strato vegetale appena umido. All'inizio degli esperimenti, l'autore dichiara di averli rimessi nell'acqua, per qualche minuto, 2 o 3 volte al giorno, ma presto s'accorse dell'inutilità di questa manovra.

Nel 1° esperimento, nel quale anche i controlli erano stati tenuti per un giorno fuori dell'acqua, i girini sperimentati emettono gli arti, o un solo arto anteriore, un giorno prima dei controlli.

Gli stessi risultati si ottengono quando i controlli non sono stati tenuti fuori dell'acqua.

L'interesse di questi esperimenti viene oscurato dal fatto che si tratta di una differenza di tempo troppo breve con i controlli: inoltre gli esemplari che servivano agli esperimenti erano notevolmente grandi (43 mm.).

La metamorfosi era già pronta ad effettuarsi; ma l'aver messo i girini fuori dell'acqua, è servito a lasciar esplodere più rapidamente i fenomeni.

Wintrebert (3) descrive di avere anche notato delle modificazioni cronologiche nelle correlazioni dei fenomeni, in seguito al cambiamento d'ambiente; ed afferma che la fuoruscita degli arti anteriori non rappresenta, nelle larve in inanizione, l'inizio della metamorfosi; il 1° fenomeno è la precoce regressione del tubo digerente. Il trasporto nell'aria, mettendo fuori uso le branchie e la coda stimolerebbe la loro regressione ma non la loro trasformazione: la coda, diviene atrofica ma conserva la sua forma; la regressione anormale delle branchie e della coda stimola forse il definitivo sviluppo degli arti (membres).

(1) Vincent S., *Internal secretion and the ductless glands*. London 1912.

(2) Wintrebert P., *Sur le déterminisme de la métamorphose chez les Batraciens Anoures*. VI. *La mise des larves hors de l'eau*. Comp. Rend, Soc. Biol. vol. 63, an. 1901, pag. 257).

(3) Wintrebert P., VII. *La marche anormale des phénomènes en inanition*. Compt. rend. Soc. Biol. 1, vol. 63, an. 1907, pag. 43.

I risultati di Wintrebert meriterebbero di essere estesi per accertare fin a qual punto si potrebbero ottenere identità di risultati con cause diverse. Si presenta interessante anche uno studio di comparazione dei risultati nelle neotenie (Anuri) con i nostri risultati sperimentali.

L'azione della tiroide come causa acceleratrice tende a prodursi più agevolmente quando le larve sono più avanzate nell'accrescimento: è opportuno di ricordare, a questo proposito, che Davemport (1) ha dimostrato che, mentre l'uovo di Rana contiene circa il 50 % di acqua, in seguito, nei primi 15 giorni, l'acqua aumenta notevolmente; poi, dopo un periodo nel quale culmina, la percentuale d'acqua tende rapidamente a diminuire. Pur tralasciando, per ora, di ricordare tutti quelli che si sono occupati dell'importantissimo argomento, ricorderò che *Schaper* (2), estendendo le ricerche di Davemport, riscontrò che le larve di Rana, al 6° giorno hanno, il 66,67 % di acqua; fin all'8° giorno l'aumento è piccolo. All'8° giorno, la percentuale dell'acqua aumenta dal 68,29 al 73,58 %: dal 10° all'11° c'è un aumento dal 76,19 all'84,95 %; dall'11° al 14° aumenta fino a 91,56 %.

Infine al 40°, c'è il 95,02 %. A tal epoca l'autore trova che sono evidenti le gemme degli arti posteriori.

Dal 40° giorno la percentuale dell'acqua comincia a diminuire. Al 54° giorno, quando il corpo è molto sviluppato, la larva presenta una quantità d'acqua che va al 92,65 %; le estremità posteriori vanno progredendo nello sviluppo.

In seguito, col progredire della fase di metamorfosi, la percentuale dell'acqua va sempre più riducendosi, fino a diventare il 76,40 %.

L'importanza di queste ricerche sta anche in questo: il comportamento dell'acqua, così diverso, in un tempo relativamente breve, è un palese indizio dell'attività metabolica che si modifica rapidamente nelle succesive fasi che si susseguono nell'accrescimento larvale: una nutrizione con tiroide viene a modificare il regolare andamento dei fenomeni, e i suoi effetti sono differenti a seconda della fase in cui vengono iniziati gli esperimenti.

Che una nutrizione con tiroide modifichi profondamente il chimismo dell'organismo, risulta oramai da una numerosa serie di ricerche sui mammiferi: una continuata somministrazione con tiroide pone l'organismo in istato patologico per la disintegrazione dell'albumina e per le aumentate ossidazioni; e si sa che con l'aumentata assunzione d'ossigeno non va di pari passo l'eliminazione dell'anidride carbonica: ed è assai importante

(1) Davemport, *The rôle of water in growth* Proc. Boston Soc. Nat-Hist., XXVIII, 1897.

(2) Schaper A., *Beiträge zur Analyse des tierischen Wachsthums.* Arch. f. Entw. Mech., Bd. 14, pag. 307.

di ricordare che Leichtenstern (1). (1894) osservò per il primo (casi di mixoedema) che con la somministrazione di tiroide si otteneva una notevole diminuzione di peso, determinata dapprima da una aumentata eliminazione d'acqua, in seguito anche da una aumentata eliminazione di sostanze azotate. Una maggiore eliminazione d'acqua si potrebbe anche dedurre dal considerare le condizioni del ricambio organico in relazione a un' intensa nutrizione con tiroide.

Soltanto dal comparare lo studio dell'azione chimica di una nutrizione con tiroide (tenuto conto degli studî finora fatti in proposito, in campi così differenti di studii) con lo studio inteso nel senso più lato della metamorfosi, può risultare una spiegazione delle peculiari modificazione che la tiroide induce negli *Anfibii Anuri*. Così l'arresto dell'accrescimento, che si riscontra negli Anfibii e che parrebbe contrario alle proprietà della tiroide, si spiega facilmente allorchè pensiamo che la nutrizione con tiroide produce negli Anfibii Anuri effetti che sono concomitanti a quelli che si riscontrano naturalmente nella fase di metamorfosi: l'organismo prima ancora di aver raggiunto il massimo dell'accrescimento larvale, verrebbe messo nelle condizioni biologiche della metamorfosi, e cessa allora di conseguenza ogni accrescimento larvale.

Ricordando il comportamento dell'acqua, io ho voluto riferirmi a una condizione biologica caratteristica della fase di metamorfosi: ma so bene che non è possibile di limitare o riferirsi unicamente a un solo possibile effetto. Il comportamento dell'acqua è un indizio, però, molto importante e palese del metabolismo di una determinata fase biologica: nello studio degli effetti della tiroide non è possibile tuttavia di prescindere da tutte le altre condizioni che si vengono a stabilire, ed è da ritenere che i fenomeni delle ossidazioni possano anche essi influire in modo cospicuo. Le antiche ricerche di *Bataillon* (2) potrebbero essere, così, considerate sotto una nuova luce.

Riassumendo.

Con questo nuovo contributo ho riassunto innanzi tutto i lavori che riguardano l' argomento che c' interessa, apparsi negli ultimi mesi, ed ho ricordato come fin dal mio primo lavoro ho insistito nel considerare l'azione disarmonica d' un' intensa nutrizione con tiroide di mammiferi, azione i cui effetti variano a seconda del grado d'accrescimento: la disarmonia è in relazione con la troppo rapida accelerazione, e ho ricordato gli effetti tossici di una intensa nutrizione con tiroide, già descritti nel mio primo lavoro, e la

(1) Leichtenstern, *Ueber Myxoedem und Entfettungskuren mit Schilddrusenfütterung* Deut. med. Woch, n. 50, an. 1894.

(2) Bataillon E., *Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibies anoures.* Ann. Univ. Lyon, tome 2, pag. 123, an. 1891.

tendenza, delle larve in metamorfosi, a non ultimare la fase iniziata. Con nuove osservazioni ho riscontrato che la disarmonia organica non solo si manifesta nelle larve nelle quali s'inizia la fuoruscita degli arti, ma si manifesta in fasi ancora precedenti; ho notato che la tiroide della larve nutrite con tiroide di mammiferi, e che hanno iniziato la fase di metamorfosi, si presenta poco voluminosa e con piccole vescicole, contenenti colloide: il debole sviluppo della tiroide innanzi ogni altra considerazione, è da mettersi in relazione con la debole massa raggiunta dagli animali nelle condizioni sperimentate. Ho poi ricordato alcune condizioni biologiche dell'accrescimento larvale e della metamorfosi degli Anfibî Anuri, e ho cercato di prospettare un rapido confronto con l'influenza chimico-biologica esercitata dalla tiroide: non è illogico il cercare di rintracciare da concomitanza di effetti la peculiare azione esercitata dalla somministrazione di tiroide di Mammiferi alle larve di Anfibii Anuri, che presentano un caratteristico ciclo biologico.

Chimica. — *Sopra una nuova modificazione del metodo di Kjeldahl.* Nota di L. Marino e F. Gonnelli, presentata dal Socio R. Nasini.

In prosecuzione di una ricerca fatta da uno di noi (1) su alcuni composti del protossido di vanadio, ci eravamo da qualche tempo proposti di vedere se le proprietà catalizzatrici degli ossidi di vanadio, ampiamente confermate ed estese da Rutter (2), potevano con vantaggio essere utilizzate nel processo Kjeldahl.

Avevamo già quasi ultimato il nostro studio, quando nel Pharmazeutische Zentralhalle, 1911, pag. 1121, apparve una breve notizia del dott. Oefele (New York, 328, E. 58) nella quale è detto che egli, usando come catalizzatore il pentossido di Vanadio, aveva ottenuto ottimi risultati.

Il dott. Oefele non diede però, a conferma di questa sua affermazione, alcuna tabella di valori, confrontabili con quelli da noi ottenuti; e siccome nelle condizioni in cui egli consiglia di operare, il trovato è sempre inferiore al valore teorico, così ci è sembrato allora conveniente ritardare la nostra pubblicazione, in attesa di qualche altra sua Nota più particolareggiata sull'argomento.

Essendo omai trascorsi due anni, crediamo di poter riferire sulle nostre esperienze le quali proverebbero che l'impiego di un tale ossido può essere praticamente consigliabile solo quando si opera nel modo da noi in seguito descritto.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa.
(2) Zeitschr. f. anorg. Chemie, *32*, 55.

Data la poca precisione delle indicazioni fornite dal dott. Oefele, riportiamo integralmente i periodi della brevissima Nota che ci riguardano.

« Da nun Vanadium das höchste bisher bekannte Vermögen zur Sauer-
« stoffübertragung besitzt, so lag es nahe der zersetzenden Schwefelsäure an
« Stelle eines anderen metallischen Sauerstoffüberträgers eine kleine Spur
« Vanadiumpentoxyd beizugeben. Unter Umständen trat nun am Anfang
« ein leichtes Aufschäumen ein, so dass die anfängliche Erhitzung vorsichtig
« gesteigert werden musste.

« Danach trat aber die Klärung und aufhaltung der Lösung und Zer-
« setzung der organischen Stoffe so rasch und glatt ein, und die Aufsau-
« gung des Ammoniak bei der folgenden Destillation vollzog sich so rasch
« und glatt, dass ich für jedes Kjeldahl-Verfahren nur den Zusatz der nötigen
« Schwefelsäure und 1 Dezigramm Vanadiumpentoxyd zur betreffenden orga-
« nischen Substanz empfehlen möchte ».

Come si vede, da questa breve notizia non risulta affatto in quali condizioni è conveniente di operare.

Senza enumerare le varie modificazioni apportate al processo Kjeldahl, perchè troppo note, ricordiamo soltanto che Rivière e Bailache (1) accennano di avere sperimentato con gli acidi vanadico e molibdico; e dicono di aver abbandonato il metodo, per la lunghezza del tempo necessario a completare l'ossidazione. A questa stessa conclusione si giunge con molte delle nostre esperienze: e certamente il dott. Oefele dev'essere stato tratto in inganno dalla presenza di qualche composto azotato presente in uno dei reattivi adoperati. Descriveremo perciò con qualche particolare il metodo da noi seguito.

Per poter controllare l'esattezza dei resultati, abbiamo sempre per alcune sostanze eseguito la determinazione dell'azoto col metodo di Dumas, prendendo come valore teorico di riferimento la media di tre o quattro determinazioni; per altre ci siamo riferiti alla media ottenuta seguendo il metodo di Gunning. La disaggregazione si faceva nei soliti palloncini per metodo Kjeldahl, aggiungendo alla sostanza pesata la quantità di catalizzatore e poi 20 cc. di acido solforico concentrato. Come ossido catalizzatore adoperavamo il pentossido di Vanadio ottenuto per lenta calcinazione del metavanadato ammonico sino a completa eliminazione dell'ammoniaca. Si teneva conto del tempo a partire dal momento in cui cominciava lo sviluppo dei vapori di acido solforico, e la reazione si considerava finita quando il liquido aveva assunto una colorazione verde-smeraldo. La soluzione solforica, dopo raffreddamento, veniva versata in 100 cc. di acqua distillata contenuta nel pallone della distillazione, lavando poi ripetutamente con acqua il recipiente.

(1) Bullet. Soc. chim. de Paris, *15*, 806 (1896).

La distillazione può comodamente eseguirsi senza inconvenienti, adattando al pallone contenente il liquido da distillare un tappo a tre fori: nell'uno passa un imbuto a rubinetto per l'introduzione della soda necessaria; nell'altro giunge il tubo adduttore di un generatore di vapore che serve a facilitare l'ebollizione del liquido alcalino; nel terzo entra una delle solite bolle Stutzer congiunta al refrigerante, all'estremità del quale trovansi i tubi di assorbimento con acido solforico titolato.

Il secondo pallone addizionale, spesso impiegato per evitare gli spruzzi della soda, diviene superfluo, perchè il liquido bolle assai regolarmente, dato che rimane limpido o con traccie minime di precipitato.

Per giungere a dei risultati sicuri ci è sembrato opportuno di determinare innanzi tutto quale è la

Influenza del catalizzatore sulla distillazione dell'ammoniaca.

È noto che uno dei maggiori inconvenienti che presenta l'impiego dell'ossido di mercurio come catalizzatore, si è quello di formare delle combinazioni mercurio-ammoniacali le quali, secondo Viollet (1) non sarebbero completamente decomponibili con la soda neppure dopo aggiunta di solfuro di sodio.

Maquenne e Roux notarono che, nell'uso del solfuro di sodio, non solo si producono dei composti solforati volatili, fra i quali l'idrogeno solforato, che disturbano la titolazione, ma si precipita anche incompletamente il solfuro di mercurio, a causa della solubilità di quest'ultimo nei solfuri alcalini. Questo porterebbe a riformare nuovamente composti ammoniacali simili a quelli che ci si propone di distruggere. Bisognava perciò assicurarsi che, una volta avvenuta la completa trasformazione, tutto l'azoto poteva eliminarsi sotto forma di ammoniaca, qualunque si fosse la quantità del catalizzatore.

Adoprammo a questo scopo del solfato ammonico puro e dell'urea della Casa Merck ma di recente ricristallizzati. Si procedeva come d'ordinario, a fine di trovarsi sempre nelle stesse condizioni.

Nelle varie esperienze si variò la quantità di catalizzatore da gr. 1 a gr. 1.5, protraendo l'ebollizione da 3 a 4 ore. Si ebbero sempre valori assai vicini al teorico, come risulta da questi due esempi riportati.

gr. 1,3008 di solfato ammonico, dopo disgregazione e distillazione, consumarono di H_2SO_4 N/1 cc. 19.8 da cui si ha la corrispondente quantità di azoto = 0.2773. Cioè: trovato N % = 21.31; calcolato per $(NH_4)_2SO_4$ = 21.20.

gr. 0.5084 di Urea convenientemente seccata, trattati nello stesso modo, consumarono di H_2SO_4 N/1 cc. 16,9 = gr. 0.237 di azoto, da cui si ha: trovato N % 46.61; calcol. per $CO(NH_2)_2$ 46.62.

(1) Bull. de la Soc. chim. de Paris, 1889, II, pag. 62.

Provando questi dati che il catalizzatore, qualunque si fosse la quantità presente, non ritiene affatto traccie di ammoniaca, cercammo di stabilire se in presenza di esso

Tutto l'azoto è trasformato in ammoniaca.

Impiegammo a questo scopo della limatura di corno e della lana nelle quali il contenuto in azoto era stato determinato col metodo di Dumas. Impiegando 1 gr. di pentossido di Vanadio e 25 cc. di acido solforico concentrato, si ebbero i valori riportati nella seguente

Tabella 1ª.

Sostanze analizzate	N % Metodo Dumas	Metodo di Kjeldahl modificato			
		Sostanza pesata in gr.	H_2SO_4 N/10 neutralizzato in cm^3	Durata ebollizione con H_2SO_4 conc. in ore	N % trovato
Lana	14.36	0.7570	73.5	1.10′	13.59
Corno	14.95	0.5852	58.0	1.10′	13.87

Come si vede da questi dati e da numerosissime altre determinazioni eseguite, la decomposizione in tali condizioni non è completa neppure se la ebollizione venga prolungata per 4 o 5 ore. Abbiamo allora tentato di completare la distruzione delle sostanze stesse mediante una lenta corrente di ossigeno; ed ecco i risultati ottenuti:

Tabella 2ª.

Sostanze analizzate	N % Metodo Dumas	Metodo Kjeldahl modificato			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/10 neutralizzato in cm^3	Durata ebolliz. con H_2SO_4 conc. in corrente di ossigeno in ore	N % trovato
		0.5022	44.2	0.45′	12.32
		0.5000	46.5	0.45′	13.02
Lana	14.36	0.5113	49.6	0.30′	13.58
		0.4391	40.4	0.30′	13.88
		0.5162	41.3	0.30′	11.20
		0.4021	37.8	0.30′	13.16
		0.5133	46.2	0.40′	12.6
		0.4997	49.0	0.35′	13.72
Corno	14.95	0.4935	48.9	0.20′	13.87
		0.4862	47.5	0.40′	13.67
		0.4805	47.1	0.30′	13.72
		0.6055	60.5	2.00′	13.98

Si vede chiaramente da questi dati che in presenza di un eccesso di ossigeno non solo non si accelera notevolmente la reazione, ma rimane anzi sempre una differenza in meno di circa l' 1 % anche prolungando per parecchie ore il riscaldamento. Questa costanza nei risultati mostrerebbe che si originano dei prodotti organici di decomposizione che nelle condizioni indicate non si trasformano in ammoniaca. Tale nostro risultato contraddice a quanto afferma il dott. Oefele, per cui differendo le nostre esperienze soltanto nella quantità di Vanadio, abbiamo esperimentato anche con piccole quantità di catalizzatore, circa 1 decigrammo, conforme alle indicazioni della Nota su riportata. Servendoci di acido solforico ($d = 1.84$) della casa Erba si ebbero i valori riportati nella seguente

Tabella 3ª.

Sostanze analizzate	N % Metodo Dumas	Metodo Kjeldahl modificato			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/10 neutralizzato in cm³	Durata ebollizione con H_2SO_4 conc. in ore	N % trovato
Corno	14.95	0.6016	60.5	2.00′	14.07
		0.8303	79.8	—	13.45
		0.2043	20.2	—	13.84
		0.2962	29.7	—	14.03
Sangue (secco)	13.83	1.7712	165.0	—	13.04
		0.7961	73.05	—	12.84
		0.6036	55.2	—	12.80

Permane evidentemente ancora il medesimo errore analitico, oscillante intorno all' 1 %, senza poter notare alcuna diminuzione quando si aumenti la concentrazione dell'acido solforico. Riportiamo a conferma della nostra affermazione nella tabella IV alcuni dati ottenuti con acido solforico concentrato purissimo della Casa Merck e con circa gr. 0,1 di V_2O_5; e nella tabella V i risultati di un'altra serie di esperienze eseguite con acido solforico fumante (7 % di SO_3). L'ebollizione si prolungava in ambedue i casi fino ad avere una soluzione verde-smeraldo, avendo cura però di eseguire in parallelo una nuova esperienza con egual quantità di sostanza e di acido solforico, allo scopo di assicurarci che i risultati non variavano quando la ebollizione continuava per un tempo doppio di quello riportato nella tabella.

TABELLA 4ª.

SOSTANZE ANALIZZATE	N °/₀ METODO DUMAS	METODO KJELDAHL MODIFICATO			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/₁₀ neutralizzato in cm³	Durata ebollizione in ore	N °/₀ trovato
Corno	14 95	0.3636	36.3	5.25′	13.97
		0.3766	36.8	4.20′	13.68
		0.3674	36 3	5.20′	13.84
Sangue (secco) .	13.83	0.3506	31.6	7.00′	12.61

TABELLA 5ª.

SOSTANZE ANALIZZATE	N °/₀ METODO DUMAS	METODO KJELDAHL MODIFICATO			
		Sostanza pesata in gr.	Acido N/₁₀ neutralizzato in cm³	Durata ebolliz. con ac. solforico conc. (7 °/₀ SO_3) in ore	N °/₀ trovato
		0.4178	41.6	—	13.93
		0.4828	48.0	—	13.91
Corno	14.95	0.4066	40.5	1.50′	13 94
		0.5090	51.4	1.40′	14.13
		0.3786	36.9	1.50′	13.64
		0.4084	37.4	—	12.82
		0.6219	58.1	—	13.07
Sangue (secco) .	13.83	0.7086	67.0	4.45′	13.23
		0.4912	44.7	4.35′	12.74
		0.3634	33 8	2.50′	13.02
		0.8869	85 9	4.00′	13.55
» (altro campione) .	14.36	0.3415	33.3	2.00′	13 65
		0.8549	87.0	—	13.62
		0.6110	54.0	2.15′	12.37
Emulsina . . .	13.24	0.2765	23.4	1.30′	11.84
Concime azotato	2.73 (col metodo ordinario)	2.0658	38.5	3.30′	2.60

Da queste e da numerose altre analisi eseguite e non riportate si può dunque concludere che il metodo, così come fu proposto da Oefele, non dà

risultati esatti, perchè indipendentemente dalla concentrazione dell'acido solforico, i composti che probabilmente si formano non vengono in tali condizioni trasformati in ammoniaca.

Per avere quindi dei risultati esatti abbiamo trovato assai conveniente aggiungere il pentossido di Vanadio all' acido solforico concentrato in presenza di solfato potassico. Allora non solo si accelera la trasformazione, ma i valori ottenuti si avvicinano ancor più a quelli ricavati applicando il semplice metodo Gunning e complelando poi l' ossidazione con permanganato in soluzione acquosa. Com' è noto per certe sostanze di difficile disaggregazione i valori che si hanno col metodo Gunning sono alquanto più bassi, cosicchè per avvicinarsi al valore teorico è necessaria l' aggiunta del permanganato. La presenza del pentossido di Vanadio renderebbe inutile quest' ultima operazione e, data la piccola quantità di precipitato, resterebbe facilitata l' eliminazione dell' ammoniaca. Valori esattissimi si hanno infatti come si può vedere dalla seguente tabella, quando si operi nel modo seguente: Circa 1 grammo di sostanza si scalda con 20-55 cc. di acido solforico concentrato, in presenza di 7 gr. di solfato potassico e gr. 0,2 di pentossido di Vanadio sino a che il colore della soluzione sia divenuto verde-smeraldo. Si aggiunge allora di nuovo circa gr. 0,2 di V_2O_5 e si continua a scaldare ancora per circa mezz'ora. Sulla soluzione, dopo raffreddamento, si opera nel modo solito servendosi del solito semplice dispositivo dianzi descritto. Ottenemmo così i risultati della seguente

Tabella 6ª.

Sostanze analizzate	Metodo Gunning (con aggiunta di $KMnO_4$, soluzione acquosa)		Metodo Gunning da noi modificato ($K_2SO_4 + V_2O_5$)			
	N °/₀ trovato	Durata ebolliz. in ore	Sostanza pesata in gr.	Durata ebollizione in ore	H_2SO_4 N/₁₀ consumato in cm³	N °/₀ trovato
Sangue (secco)	14.18	4.45′	0.7542	4.0′	76.2	14.15
			0.7359	4.0′	75.2	14.30
Lana	15.05	4.30′	0.7058	3.40′	75.3	14.93
			0.9175	3.40′	98.1	14.96
Corno	15.77	5.50′	0.7536	5.0′	84.6	15.71
Emulsina. . .	13.24	5.0′	0.8803	4.0′	82.6	13.30
» . . .	13.24	5.0′	1.0117	4.0′	94.9	13.17

Riassumendo da quanto è stato detto risulta che:

1°) Il metodo, così come fu proposto da Oefele conduce a risultati inesatti nell' N °/₀, differendo i valori trovati dal teorico di circa l' 1°/₀.

2°) Seguendo la modificazione da noi proposta si hanno risultati esatti quando si fa bollire la sostanza organica (circa 1 gr.) con 20 cc. di acido solforico concentrato in presenza di circa 7 gr. di solfato potassico e gr. 0,2 di V_2O_5 fino ad ottenere una soluzione verde smeraldo. Essa può vantaggiosamente impiegarsi in tutti quei casi in cui la modificazione di Gunning non è sufficiente per trasformare tutto l'azoto in ammoniaca.

Chimica. — *Sui borati*: sistema BaO-B^2O^3-H^2O a 30°. Nota I di U. Sborgi, presentata dal Socio R. Nasini (1).

In continuazione delle ricerche sulla composizione dei borati coi metodi descritti in Note precedenti (2), riferisco qui i risultati ottenuti nello studio del sistema BaO, B^2O^3, H^2O a 30°.

I borati di bario preparati per via umida, che sono stati descritti fin qui, sono i seguenti:

	Molecole BaO-B^2O^3-H^2O	BaO %	B^2O^3 %	H^2O %	
I	1-1-2	59.125	26.988	13.887	Atterberg (3)
II	1-1-4	51.914	23.694	24.392	»
III	1-1-5	48.930	22.332	28.738	Ditte (4)
IV	1-1-10	38.007	17.347	44.646	Laurent (5)
V	1-1-x	—	—	—	Berzelius
VI	2-3-3	53.740	36.792	9.468	Atterberg
VII	2-3-7	47.725	32.667	19.608	»
VIII	3-5-6	50.11	38.12	11.77	H. Rose (6)
IX	1-2-2	46.617	42.553	10.830	Gmelin
X	1-2-5	39.998	36.510	23.492	Berzelius Thénard
XI	1-2-x	—	—	—	Tünnermann
XII	1-4-12	23.61	43.106	33.284	Ditte (7)

Precipitati delle formule 1-3-6, 3-4-21, 3-8-41 ottenuti il primo da Atterberg, gli altri due da Laurent (8), furono riguardati come miscugli di varî borati.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Pisa.
(2) Rend. Acc. Lincei, vol. XXI, pag. 855 e vol. XXII, pagg. 90, 636, 715, 798.
(3) Oefvers. af K. Vetensk. Akad. Fölh 1874.
(4) Ann. Chim. Phys. [5] 30, (1833) 253; e Compt. rend., 96 (1883) 706.
(5) Compt. chim., 1850, 33; Ann. 76, 263; J. B. 1850, 256.
(6) Pogg. 87, 1; J. B. 1852, 314.
(7) Ann. Chim. Phys. [5] 30, (1833) 253; e Compt. rend., 96 (1883), 706.
(8) Confr. per questi e gli altri composti citati: Gmelin-Kraut's-Handbuch der anorg. Chemie (Sieb. Aufl.) Band, II, Abt. 2, 96 e seg.

Per lo studio del sistema ritenni opportuna, per le ragioni che dirò dopo, la preparazione di alcuni borati di bario; e per questa preparazione seguii le diverse vie che sto per descrivere, sempre facendo reagire barite ed acido borico.

Preparazione I. — 170 gr. di barite si scioglievano in circa 500 cm.^{3} di acqua calda e si lasciava depositare il carbonato formatosi. Questa soluzione si filtrava direttamente in una soluzione quasi bollente di 62 gr. di acido borico in circa 200 cm.^{3} di acqua esente da CO^2, tenendo questa soluzione su fiamma. La barite gocciava attraverso il vapor d'acqua allo scopo di evitare la carbonatazione. A mano a mano che la barite gocciava, si formava un precipitato fioccoso, che dapprima si discioglieva agitando, e poi cessava di sciogliersi: in seguito si trasformava in cristallino. Si aggiungeva barite finchè una porzione del liquido, saggiata a parte, non desse reazione leggermente alcalina alla fenolftaleina dopo aggiunta di mannite: quindi si lasciava in riposo per 30 ore a freddo. Dopo 30 ore il precipitato era divenuto polverulento; ed il liquido sovrastante, saggiato come sopra, dava reazione acida. Si filtrava questo precipitato: si lavava rapidamente con acqua (il che si poteva fare con assai facilità); poi si raccoglieva in carta da filtro tra piastre porose e si lasciava seccare. L'analisi (1) dava i seguenti risultati: 47,751 BaO %; 34,897 B^2O^3 %; 17,352 H^2O %. Il composto conteneva una piccola quantità di carbonato, come si poteva riconoscere da un po' di effervescenza prodotta dall'acido. È stata notata più volte la facilità colla quale si trova del carbonato nei borati di bario. Sono stati anche descritti composti del tipo 3 ($BaO . B^2O^3 . H^2O$) 1 CO^2, 4 ($BaO, B^2O^3, CO^2, 7H^2O$) (2).

Preparazione II. — Si procedeva in tutto come è stato detto sopra: ma a mano a mano che col riposo il liquido sovrastante al precipitato si faceva acido, si aggiungeva barite fino a reazione alcalina.

La scomparsa della barite era assai rapida nei primi giorni; poi si faceva più lenta; in ultimo lentissima. Frattanto il precipitato diveniva nettamente cristallino. Si raccoglieva, si lavava e si asciugava come sopra. La analisi dava 51,84 % BaO, 21,69 % B^2O^3, 26,47 % H^2O.

Preparazione III. — Si partiva dalla solita soluzione calda di barite che si faceva gocciare nel solito modo (filtrandola) in una soluzione di acido borico come quella della preparazione I, tenuta a caldo. Si aggiungeva barite finchè il precipitato fioccoso formantesi cessava di sciogliersi per agitazione. Allora si faceva freddare il liquido tenendo chiuso il recipiente con

(1) L'analisi veniva eseguita qui ed in tutti i seguenti casi coi soliti metodi volumetrici (titolazione della barite con un acido (metilorange): ebollizione in refrigerante a ricadere, per cacciare la CO^2 eventualmente presente: titolazione dell'acido borico con soda esente da carbonati con aggiunta di mannite ed in presenza di fenoftaleina). Tutti i resultati analitici riportati sono la media di varie determinazioni concordanti.

(2) A. Rose, Pogg. 87, 1; J. B. 1852, 314.

tubo a calce sodata, e si otteneva un po' di precipitato di apparenza cristallina. Ora in un altro pallone si filtrava la barite residua facendo passare attraverso il pallone una corrente di idrogeno per impedire la carbonatazione. E poi nella barite filtrata e mantenuta a temperatura ambiente (circa 20°) si faceva arrivare la soluzione fredda di acido borico e di barite prima ottenuta, filtrandola dai cristalli che da essa si erano depositati.

Si continuava frattanto sempre a far passare idrogeno che serviva anche ad agitare tutta la massa. Si formava così un precipitato dapprima fioccoso, poi cristallino, che si deponeva rapidamente lasciando il liquido sovrastante ben limpido. Ad un certo punto questa rapidità di deposizione diminuiva; e, saggiando il liquido nel solito modo si trovava ora reazione acida, ma, aggiungendo un poco di barite fino a reazione alcalina, il liquido tornava a farsi limpido ed il precipitato a deporsi con rapidità. Dopo un riposo di 24 ore si decantava, si lavava con acqua, si raccoglieva e si seccava come nei precedenti casi. L'analisi dava i seguenti resultati: BaO 50,715 %; B^2O^3 22,480 %, H^2O 26,805 %.

Preparazione IV. — Volli applicare al bario il metodo che Van' t' Hoff e Meyerhoffer impiegarono per la preparazione del metaborato di calcio (1), ponendo a reagire l'acido borico con idrato di bario formantesi per doppia decomposizione tra un idrato alcalino ed un sale di bario. La presenza del sale alcalino nel caso del calcio favorisce grandemente la formazione del metaborato che si ottiene rapidamente e ben cristallino, e si volle vedere se questo non si ottenesse anche per il bario. 122 Gr. di $BaCl^2 . 2H^2O$ si scioglievano in 400 cm.^{3} di acqua a caldo: 56 grammi di KOH si sciolsero pure in 400 cm.^{3} di acqua, e pure in 400 cm.^{3} di acqua (esente da CO^2) si sciolsero 62 gr. di acido borico. Poi si posero 40 cm.^{3} della soluzione di $BaCl^2$ nella soluzione di potassa caustica: si ebbe un precipitato di carbonato di bario. Si filtrò alla pompa, ed al filtrato si aggiunse la soluzione restante di $BaCl^2$. Della miscela, così ottenuta se ne versò nella soluzione di acido borico calda tanta quanta bastò a produrre precipitato permanente, che si separò per filtrazione. Il liquido filtrato si aggiunse ora a piccole porzioni al miscuglio residuo di barite e cloruro potassico, operando a temperatura ambiente. Ad ogni aggiunta di liquido si formava un precipitato fioccoso: ma questo si scioglieva subito per agitazione; finiva anche per sciogliersi tutta la barite che era cristallizzata in fondo al pallone. A mano a mano però il ridisciogliersi si faceva più difficile, ed in seguito compariva un precipitato cristallino. La reazione del miscuglio si manteneva intanto alcalina (mannite e fenoftaleina). L'aggiunta fu proseguita fino a perfetta neutralizzazione: si aggiunse poi qualche goccia di barite. Il precipitato si

(1) Ann., 351 (1907), pag. 109. Cfr. Nota sui borati di calcio., Rend. Acc. Lincei, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9, pag. 715.

deponeva rapidamente: il liquido sovrastante era ben limpido. Dopo 24 ore di riposo si decantava (il liquido aveva reazione alcalina come sopra), si filtrava, si lavava con acqua esente da anidride carbonica fino a reazione di cloruri, il che si poteva fare facilmente e rapidamente. Il composto, ben cristallino, raccolto e analizzato, era così costituito: 52,73 % BaO; 23,70 % B^2O^3; 23,57 % H^2O.

Preparazione V. — Una certa quantità di $Ba(OH)_2 . 8H^2O$ si pose a scaldare in un bagno a 80° con aggiunta di una piccolissima quantità di acqua. La soluzione di barite così ottenuta si filtrò poi per filtro caldo in una soluzione di acido borico satura a 50°. Si ottenne un precipitato cristallino: il liquido presentava reazione acida alla fenoftaleina, senza aggiunta di mannite. Si continuò ad aggiungere barite fino ad ottenere una certa quantità di precipitato, ma senza che il liquido divenisse alcalino alla fenolftaleina (senza mannite). Dopo una notte di riposo, si filtrò alla pompa comprimendo anche con carta da filtro. Ma non si lavò per evitare decomposizione, poi si seccò tra carta. L'analisi dette: 31,535 % BaO, 42,124 % B^2O^3; 26,341 % H^2O.

Preparazione VI. — Si tenne la stessa via della preparazione precedente: ma, dopo ottenuto il precipitato cristallino, si aggiunse barite fino a reazione alcalina incipiente alla fenoftaleina senza aggiunta di mannite, ma acida dopo aggiunta di mannite. Il precipitato da cristallino divenne polverulento. Si raccolse e si asciugò nel solito modo. Poi si analizzò: BaO % 38,217; B^2O^3 % 42,131; H^2O % 19,352. Il composto conteneva carbonato.

Se si confrontano i risultati analitici delle 6 preparazioni, colle composizioni teoriche riportate nella tabella I, si vede che le preparazioni II, III e IV fornirono, più o meno puro, un composto unico, il metaborato tetraidrato 1-1-4. Dalla preparazione I si è ottenuto invece un composto che contiene 2 molecole di BaO per 3 di B^2O^3 con 6 molecole di acqua di cristallizzazione. Composizione teorica: 49 03 % BaO; 33,569 % B^2O^3; 17,401 % H^2O. La preparazione V ha invece dato un composto della formula 1 3-7 (triborato eptaidrato). Com osizione teorica: 31,36 % BaO; 42,94 % B^2O^3; 25,70 % H^2O. Dalla preparazione VI, finalmente, si è ottenuto un precipitato in cui il rapporto tra BaO e B^2O^3 non corrisponde a quello di un composto ben definito e semplice: è un rapporto intermedio tra quello che si ha nel composto 1-3 e quello che si ha nel composto 2-3. Dove si hanno differenze tra le composizioni trovate e le calcolate, credo che esse in gran parte provengano dai modi di lavaggio, dalla influenza della anidride carbonica dell'aria, ma più di tutto dalla grande facilità con cui da un composto si passa all'altro col variare dei rapporti dei componenti, come è dimostrato dai resultati delle preparazioni descritte. Ma questi resultati mi sembra esprimano una regolarità nella formazione di questi composti. Aggiungendo barite ad acido borico in quantità tale che la soluzione rimanga

fortemente acida, io ho ottenuto il triborato. Ditte, in condizioni simili, ottenne un tetraborato. Presumibilmente la formazione dell'uno o dell'altro composto è condizionata dalla maggiore o minore quantità di barite aggiunta. Continuando ad aggiungere barite, dal composto 1-3 si passa ad un precipitato di composizione intermedia tra l'1-3 ed il 2-3: per ulteriore aggiunta di barite, si giunge al 2-3 polverulento che si forma subito e che si può separare.

Anche Atterberg ottenne questo composto intermediariamente nella preparazione del metaborato. Seguitando ancora ad aggiungere barite, si passa al composto 3-3, ossia nella formola più semplice al composto 1-1. Ma la terza molecola di Ba O pare si addizioni più lentamente al precipitato di 2-3 preformato come risulterebbe dal lento comparire dell'acidità nella soluzione ossia dalla lenta scomparsa della barite: fatto, questo, constatato nella preparazione II. Quando tutto il precipitato si è trasformato in metaborato, e la reazione è alcalina, il composto diviene cristallino. Che se poi la preparazione si fa in liquido alcalino, cioè se si goccia la soluzione acida nella barite come nelle preparazioni III e IV, la formazione del metaborato è più rapida, e si passa subito al composto cristallino. E credo che questo possa ricevere una spiegazione assai semplice:

In liquido acido si forma dapprima un composto ricco in acido borico che precipita; e questo reagisce poi soltanto lentamente colla barite che si aggiunge. In liquido alcalino l'acido borico viene legato in qualche composto labile ad alto contenuto in barite, che rimane in soluzione: quando si arriva ai rapporti rispondenti o adatti alla formazione del metaborato, questo precipita cristallino.

Di questi composti, il metaborato 1-1 ed il composto 2-3 erano stati dsscritti anche precedentemente: un precipitato di composizione assai vicina al triborato era stato creduto da Atterberg un miscuglio di altri borati. Atterberg aveva ottenuto precipitati di composizione assai vicina a 1-3-6: il composto da me ottenuto nella preparazione V risponde alla formula 1-3-7.

Vedremo quali di questi precipitati debbano ritenersi come miscugli e quali come composti, alla temperatura di 30°, dopochè in una prossima Nota avrò riferito sullo studio del sistema dal punto di vista della teoria delle fasi.

Mineralogia. — *Epidoto e Granato della miniera di Brosso (Piemonte)* (1). Nota di E. Grill, presentata dal Corrisp. Federico Millosevich.

Ai minerali provenienti dalla miniera di Brosso, alcuni dei quali sono stati da tempo illustrati [Pirite (Strüver) (2); Baritina, Arsenopirite, Galena (Colomba) (3)], oltre la bournonite già descritta in una mia precedente Nota (4), aggiungo ora l'epidoto e il granato, non ancora descritti, per quanto sapppia, da alcuno.

Epidoto (var. *pistacite*).

Nei vani di una massa epidotica cristallina macchiata qua e là di ematite micacea si osservano dei piccoli cristalli di epidoto assai lucenti e di un bel colore verde pistacchio. Essi sono poco liberi stando aderenti alla massa secondo la loro maggior dimensione. Questa è avvenuta, come di solito, parallelamente all'asse [*y*] e nei cristalli più grandi, opachi, oscilla tra 2-4 mm., ma negli altri, meglio cristallizzati, è assai minore.

I cristalli terminati nettamente anche ad una estremità sola sono rari, se si prescinde da quelli piccolissimi, le cui facce terminali, quasi microscopiche, non permettono più di fare delle misure goniometriche attendibili. Anche le facce della zona [010] nella maggior parte dei cristalli non si prestano molto meglio, benchè più estese, essendo esse poco piane e talvolta rigate parallelamente all'asse di allungamento per una ripetuta associazione di piccoli cristalli uniti o parallelamente o in geminazione.

In quasi tutti i cristalli osservai la comune legge di geminazione secondo (100).

Le ricerche cristallografiche dalla imperfezione di molti cristalli vengono quindi assai limitate; del resto la cristallografia dell'epidoto italiano e specialmente di quello piemontese è stata già ottimamente studiata da valenti mineralisti come: Boeris, Brugnatelli, Colomba, La Valle, Millosevich, Pelloux, Zambonini e sopratutto da quest'ultimo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico di Firenze.

(2) Strüver G., *Studi sulla mineralogia italiana. Pirite del Piemonte*, ecc. Torino, 1869.

(3) Colomba L., *Baritina di Traversella e di Brosso*. Rend. R. Acc. Lincei, XV, 419, 1906; ibid., XVIII, 510, 1909; Colomba L., *Osservazioni cristallografiche su alcuni minerali di Brosso e Traversella*, ibid., XV, 636, 1906.

(4) Grill E., *Bournonite della miniera di Brosso*. Rend. R. Acc. Lincei, XXIII serie 5ª, fasc. 2°, 1914.

Relativamente agli epidoti di varie altre località piemontesi, quello di Brosso è poco ricco di forme. Vi osservai le 12 seguenti:

$M\{001\}$, $T\{100\}$.
$\{504\}$, $e\{101\}$, $\{\bar{3}07\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{\bar{5}06\}$, $\{\bar{1}\bar{6}.0.17$, $r\{\bar{1}01\}$.
$z\{110\}$.
$n\{\bar{1}11\}$, $q\{\bar{2}21\}$.

Riporto qui alcuni dei migliori valori angolari osservati posti a confronto con quelli calcolati dalle costanti di Kokscharow.

Angolo		N	Media	Estremi	Calcolato
(001)	(504)	2	38°25′	38°30 - 38°20	38°39′
»	(101)	4	34 33	34 35 - 34 30	34 42
»	($\bar{3}07$)	1	28 8	—	29 14
»	($\bar{1}02$)	2	34 30	34 38 - 34 32	34 21
»	($\bar{1}\bar{6}.0.17$)	1	61 18	—	60 58
»	($\bar{1}01$)	7	63 42	63 50 - 63 30	63 42
»	(110)	3	75 30	75 55 - 75 15	75 45
»	($\bar{1}11$)	2	75 10	75 18 - 75 2	75 12
»	($\bar{2}21$)	2	89 38	89 44 - 89 34	89 42
(100)	(001)	7	64 24	64 40 - 63 40	64 36
»	(110)	3	54 48	54 50 - 54 45	55 0
»	($11\bar{1}$)	2	69 5	69 7 - 69 3	69 4
($\bar{1}10$)	($\bar{2}21$)	3	14 35	14 40 - 14 29	14 33
($\bar{1}11$)	($\bar{2}21$)	2	14 28	14 44 - 14 18	14 30
($\bar{1}01$)	($\bar{1}11$)	1	54 40	—	54 46

Alla misura dell'emiortodomo positivo $\{\bar{1}\bar{6}.0.17\}$ (Bücking), osservato una sola volta con una faccia abbastanza estesa avrei potuto sostituire il simbolo $\{\bar{1}\bar{9}.0.20\}$ (Flinck) meglio corrispondente per valore teorico (61°24′), ma considerate le forti oscillazioni di parecchi degli angoli, ho preferito il simbolo più semplice.

Analogamente ai cristalli di vari altri giacimenti, quelli di Brosso sono costantemente appiattiti secondo (100) restando la faccia (001) sempre poco sviluppata. Le tre forme terminanti sull'asse $[y]$ compaiono sempre assieme, con z e n quasi di uguale sviluppo e q assai più piccola, troncante gli spigoli delle due prime paralleli a (001) : (110).

Onde stabilire la proporzione dei due silicati $x(H_2Ca_4Al_6Si_6O_{26}) + y(H_2Ca_4Fe_6Si_6O_{26})$ nella miscela isomorfa dell'epidoto ne fu fatta l'analisi con i seguenti risultati:

SiO_2		38,02
Al_2O_3		19,00
Fe_2O_3	Fe_2O_3 15,02 FeO 1,06	16,20
CaO		24,49
MgO		0,37
H_2O		2,31
		100,39

da cui (1) y è uguale a 37 circa.

L'epidoto di Brosso rientra quindi, per la sua composizione chimica, nella serie degli epidoti più ricchi in silicato di ferro. È noto che i due termini estremi entro cui sono compresi i veri epidoti, sono quelli con un minimo di 8 % (2) di silicato di ferro fino ad un massimo di 40 % (3).

Riguardo ad altri epidoti piemontesi dei quali è stata fatta l'analisi, quello di Brosso corrisponde per la sua percentuale di silicato di ferro a due campioni di Traversella, analizzati da Scheerer (4) e Rammelsberger (5), e s'avvicina assai all'epidoto di Biella, analizzato da Zambonini (6), mentre supera altri due epidoti, uno ancora di Traversella, analizzato pure da Rammelsberger (7), e l'altro di Rocca Rossa, analizzato da Zambonini (8).

Un altro epidoto piemontese assai meno ferrifero dei precedenti, con solo l'11-12 % di silicato di ferro e che quindi già si accosta alla serie della clinozoisite, venne trovato, com'è noto, in Val d'Aosta a S. Barthélemy da Pelloux, e fu analizzato da F. Millosevich (9).

Di molti altri epidoti piemontesi e italiani omai ben conosciuti dal lato cristallografico e taluni anche da quello ottico, non esistono le analisi

(1) Weinschenk E., *Ueber Epidot und Zoisit*, Zeitsch. f. Kryst., XXVI, 165, 1896.

(2) Schlemmer C., *Dunkelgrüner Epidot von Zöptau in Mähren.* Tscher. Min. Mitth., 258, 1872.

(3) Ludwig E., *Ueber die chemische Formel des Epidots.* Tscher. Min. Mitth., 187, 1872.

(4) Vedi: Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, pag. 250, II, Leipzig, 1897.

(5) Vedi: Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, pag. 250, II, Leipzig, 1897.

(6) Zambonini F., *Ueber die Drusenmineralien des Syenits der Gegend von Biella*, Zeitsch. f. Kryst. u. Min., XL, 1905.

(7) Vedi: Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, pag. 250, II, Leipzig, 1897.

(8) Zambonini F., *Krystallographisches ueber den Epidot*, ibid., s. 50, XXXIV, 1902.

(9) Millosevich F., *Sopra gli Epidoti poco ferriferi (clinozoisite-epidoto) di S. Barthélemy in Val d'Aosta.* Atti soc. Ligust. Sc. Nat., ecc., XIX, 1908.

chimiche, le quali avrebbero avuto una considerevole importanza per farci conoscere la relazione che passa fra le proprietà fisiche delle varie miscele epidotiche e il loro contenuto in ferro, come già fece Weinschenk (1) per gli epidoti di alcune altre località.

I cristalli da me esaminati, male si prestano, a causa della loro piccolezza, alla determinazione esatta dei varî caratteri ottici (indici di rifrazione, birifrazione, angoli degli assi ottici, ecc.) e quindi ho dovuto accontentarmi di misurare l'indice di rifrazione per confronto con quello dell'ioduro di metilene in cui avevo sciolto dello zolfo per renderne più elevato l'indice.

Trovai alla luce del sodio $\beta' = 1{,}7586$. Questo valore abbastanza elevato riconferma la sua dipendenza dal contenuto in ferro come nelle varie miscele epidotiche.

A motivo della già ricordata piccolezza dei cristalli non mi fu possibile misurare, in modo sicuro, col compensatore di Babinet, il valore della birifrazione, e quindi mi limito a riportare il valore medio $\lambda - \alpha = 0{,}020$, trovato da Ramsay (2), nell'epidoto di Brosso, pur osservando che esso non deve corrispondere a quello dei miei cristalli in cui, data la percentuale in ferro, la birifrazione deve essere indubbiamente maggiore.

La densità col metodo della sospensione fu trovata alquanto maggiore di 3,447 (massima densità dell'ioduro di metilene acquistata da Merk).

Granato (var. *grossularia*).

Alla varietà grossularia appartengono alcuni bei cristalli di granato d'un color giallognolo volgente al rosso vinato, impiantati sopra una fitta massa di granato e pirite, con tracce di ematite micacea e di calcite spatica.

I cristalli maggiori hanno una dimensione massima di 1 cm. circa, e sono i meglio finiti; gli altri, assai più piccoli, sono tutti imperfetti. Fra i grossi ve ne sono di quelli limitati soltanto dal solito icositetraedro $n\{211\}$, il quale, com'è noto, allo stato isolato, è la forma caratteristica dei cristalli di talune località (Laachersee, Andreasberg, Striegau). È interessante poi notare che anche il colore dei cristalli con la sola forma $n\{211\}$, provenienti dalle suddette località, coincide con quello dei cristalli di Brosso.

Nei campioni di Brosso si vedono pure dei granati con la combinazione $n\{211\}$ $d\{110\}$, con quest'ultima forma sempre poco sviluppata. Le facce di entrambe le forme sono lucenti; quelle di $n\{211\}$ sono, come di solito, marcatamente rigate parallelamente alla loro intersezione con $d\{110\}$ e poco piane per avere la loro superficie spezzettata. Le facce di $d\{110\}$, di cui appaiono solo alcune, sono invece nettamente speculari.

(1) Weinschenk, loc. cit.

(2) Ramsay W., *Ueber die isomorphe Schichtung und die Stärke der Doppelbrechung in Epidot.* Zeitsch. f. Kryst. u. Min. XXV, 505, 1896.

Biologia. — *La meteorologia della leishmaniosi interna nel Mediterraneo.* Nota I del dott. Carlo Basile (1), presentata dal Socio B. Grassi.

Lo studio della biologia dei protozoi patogeni ad ospite intermedio dimostra che in natura è possibile il loro ciclo evolutivo nei loro ospiti trasmissori soltanto quando esistono determinate condizioni meteorologiche (temperatura, umidità).

Questo studio di ordine biologico è di notevole importanza per la epidemiologia delle malattie che questi stessi protozoi determinano.

La possibilità della trasmissione di una protozoosi da un soggetto infetto ad uno sano per mezzo di un insetto trasmissore non è soltanto subordinata alla diffusione di questo insetto nella località che si considera, ma anche alle condizioni meteorologiche che vi si riscontrano, le quali possono facilitare o vietare il ciclo di sviluppo dei protozoi nel loro ospite intermedio.

Sin dal 1911, io (2), con ricerche sperimentali dimostrai che la temperatura di 22° ctgr. è molto favorevole allo sviluppo delle leishmania nelle pulci (*ctenocephalus serraticeps*) e dimostrai ancora che, in natura, le pulci infette riescono alla loro volta infettanti dal dicembre al marzo, non escludendo che possano riuscire infettanti anche negli altri mesi dell'anno, qualora esistano in questi le opportune condizioni meteorologiche.

Questo dato scientifico dimostra che sono di nessun valore le critiche di coloro, i quali tentano di combattere la importanza delle pulci nella trasmissione della leishmaniosi interna nelle regioni del Mediterraneo colla considerazione che la leishmaniosi presenta una ricorrenza inverno-primaverile, mentre le pulci sono più numerose nei mesi estivi.

Nel bacino del Mediterraneo e precisamente in Tunisi, Cortesi e Levy (3) segnalarono la esistenza di una ricorrenza primaverile della leishmaniosi nei bambini; successivamente il Gabbi (4) accertò che anche in Messina il maggior numero di casi si inizia nei mesi di aprile e di maggio. Il Crithien nei 21 casi descritti (1909-1910) nell'isola di Malta riferì che soltanto in due lo inizio è stato notato nei mesi estivi; gli altri casi si sono iniziati nei mesi che vanno dall'ottobre all'aprile. Lo Jemma (5) a Palermo, da uno studio sull'inizio dell'infezione in 110 casi concluse che lo inizio della malattia

(1) Dall'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.
(2) R. Accad. Lincei, gennaio, febbraio, marzo, aprile, giugno 1911.
(3) Archives de l'Institut Pasteur de Tunis. 1910.
(4) *Malaria e malattie dei paesi caldi.* 1911.
(5) *Pediatria.* 1914.

cade quasi sempre nei mesi invernali, quantunque un gran numero di casi sieno stati osservati nei mesi estivi (giugno, luglio).

Uno studio molto più completo a questo riguardo è stato pubblicato dal Lignos, il quale in tutti i casi occorsi nell'isola di Hydra, negli anni dal 1910 al 1913, ha accertato che i primi casi si osservano colà al principio dell'inverno, che essi raggiungono il massimo nel mese di febbraio e che poi mano mano si fanno più rari per disparire completamente in estate.

Tali ricerche riferite allo inizio dell'infezione sono state abbastanza facili ad eseguirsi nella forma infantile, giacchè i parenti degli infermi ricordano con una esattezza accettabile, almeno nel maggior numero dei casi, il presentarsi dei primi fenomeni della infezione. Nella leishmaniosi infantile la diagnosi è possibile quando la infezione è del tutto evoluta nella sua sintomatologia clinica, quindi dopo alcuni mesi dal suo inizio; la diagnosi clinica sinora procede contemporaneamente alla diagnosi microscopica e culturale del succo splenico aspirato per puntura dalla milza ipertrofica.

Su questo fatto ho voluto insistere perchè, volendo studiare, nelle stesse regioni mediterranee, l'epoca di inizio della leishmaniosi nel cane, noi, in questo animale, non possiamo accertarla direttamente. Dobbiamo accontentarci invece di rilevarla diagnosticando la malattia quando essa è del tutto clinicamente sviluppata, oppure eseguendo delle ricerche microscopiche e culturali degli organi emopoietici dei cani viventi nei focolai endemici di leishmaniosi infantile; tali ricerche, come succede nella forma infantile, anche nella forma canina sono positive dopo alcuni mesi dall'inizio dell'infezione, secondo l'età e la recettività del soggetto colpito.

Infatti nei miei esperimenti di trasmissione della leishmaniosi, per via naturale, a cuccioli sani, io osservai reperto positivo delle leishmania nei loro organi emopoietici dopo circa 2 mesi che su essi cuccioli avevo posto numerose pulci infette.

Anche nelle infezioni sperimentali dei cani, si osserva risultato positivo delle leishmania nei loro organi emopoietici dopo più mesi dalla inoculazione.

Queste considerazioni hanno condotto me a vagliare, con sereno spirito scientifico, le ricerche che l'Alvares, il Cardamatis, il Sergent, il Senevet, il Lignos hanno eseguito sulla frequenza della leishmaniosi nei cani adulti viventi in quelle stesse località ove questi autori osservarono la leishmaniosi nei bambini. La diagnosi è stata fatta coll'esame microscopico degli organi emopoietici. Dal complesso delle ricerche di questi autori risulta che il maggior numero di cani infetti, persino il 40 %, si riscontra nei mesi estivi; tenendo adunque presente che lo esame microscopico degli organi emopoietici dell'uomo e degli animali naturalmente infetti, dà risultato positivo dopo alcuni mesi dall'inizio dell'infezione secondo l'età e la recettività del soggetto colpito, dobbiamo ritenere che, anche nel maggior numero dei cani la

leishmaniosi si inizia nei mesi inverno-primaverili. Anche in modo identico a come avviene nei bambini, esistono talora dei cani nei quali potrebbe apparire che la infezione si sia iniziata negli altri mesi dell'anno.

Nello studio della meteorologia della leishmaniosi interna del Mediterraneo sono veramente interessanti le ricerche del Lignos, delle quali, in seguito a mia richiesta, io ebbi conoscenza diretta da parte dell'autore prima ancora che fossero pubblicate. Anche dalla scuola del prof. Jemma mi furono inviati i dati di inizio della leishmaniosi nei 110 casi osservati a Palermo dal 1909 al 1913; dal prof. Deginitis, direttore della stazione meteorologica di Atene, mi furono inviati i dati meteorologici della stazione di Nauplie che è vicinissima all'isola di Hydra; ed infine dal prof. Palazzo, direttore dell'Ufficio centrale meteorologico di Roma, mi furono favoriti i dati meteorologici osservati nelle stazioni di Palermo e di Messina; di queste cortesie io sentitamente ringrazio i suddetti professori.

Con questi dati meteorologici io potei compilare le seguenti tabelle, nelle quali con varî segni sono indicati, per ogni stazione, i dati massimi di temperatura osservati nelle varie decadi mensili:

Col segno ⊟ sono indicate le temperature massime inferiori a 18° ctgr.

Col segno ▮ sono indicate le temperature massime comprese fra 18° e 22° ctgr.

Col segno ▩ sono indicate le temperature massime comprese fra 18° e 30° ctgr.

Col segno ⊡ sono indicate le temperature massime superiori a 30° ctgr.

Le temperature massime comprese fra 18° e 30° ctgr. sono quelle in cui le leishmania possono evolversi nelle pulci; quando le temperature massime non raggiungono i 18° ctgr. o sorpassano i 30° ctgr., le pulci, per quanto appare sin'oggi, non si dimostrano infettanti.

Lo studio del focolaio endemico di Hydra è particolarmente interessante, perchè quest'isola conta circa 6000 abitanti ed in essa si osservano in media, per ogni anno, dieci bambini infetti di leishmaniosi; nessun caso quindi può sfuggire alla diligente ricerca del medico; questo fatto di certo non può ripetersi nelle grandi città come Palermo, dove, quantunque la indagine clinica sia più estesa che altrove, pur tuttavia molti casi di leishmaniosi possono sfuggire alla ricerca degli studiosi; per la statistica di Palermo è anche da notare che, la massima parte dei casi ivi osservati, sono dati da bambini provenienti dai varî paesi e città più o meno lontani da Palermo, e dove quindi la malattia si iniziò in condizioni meteorologiche probabilmente differenti da quelle di Palermo.

La tabella n. 1 che riguarda le condizioni metereologiche della stazione di Nauplie, nel di cui dipartimento si trova l'isola di Hydra dimostra

che in quest'isola dal novembre all'aprile si riscontrano costantemente delle temperature massime comprese fra 18° e 22° ctgr., e che negli stessi mesi si iniziano il maggior numero di casi di leishmaniosi nei bambini; onde, anche tenendo conto di un periodo di incubazione dell'infezione, precedente al primo manifestarsi di sintomi, risulta accertato che le condizioni meteorologiche di 18° 22° ctgr. rappresentano, per quanto risulta fin'oggi, le condizioni più favorevoli allo sviluppo delle leishmania nel loro ospite trasmissore e conseguentemente alla capacità infettante di questo; tale fatto coincide perfettamente con quanto era risultato nelle mie precedenti ricerche sperimentali e per ciò appunto io, in queste tabelle, ho voluto indicare a parte tali temperature massime, comprese fra 18° e 22° ctgr. La infezione in Hydra può anche trasmettersi in quei mesi nei quali possono talvolta notarsi delle temperature massime che non sorpassano i 30° ctgr.; dalla stessa tabella sembra anche che, in quest'isola 4 casi siano occorsi in mesi nei quali sono state osservate delle temperature massime superiori ai 30° ctgr.; per quest'ultimo fatto bisogna però notare che questi 4 casi sono occorsi rispettivamente nei mesi di maggio 1913 e di giugno 1911, 1912, 1913, onde per essi si può ammettere che il *virus* sia stato inoculato nei bambini nei mesi immediatamente precedenti, nei quali sono state osservate delle temperature comprese fra 18° e 30° ctgr.

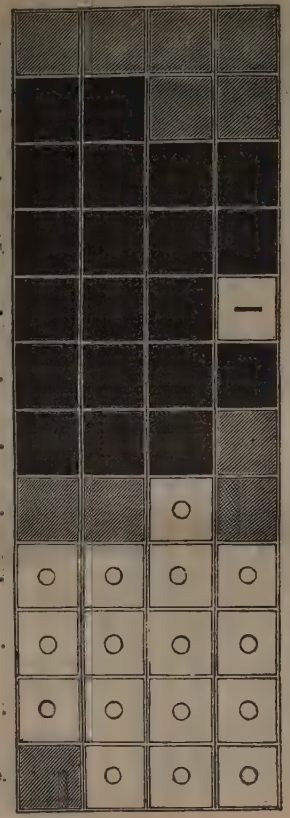
Queste deduzioni tratte per l'isola di Hydra trovano piena conferma nelle seguenti tabelle redatte sui dati meteorologici di Palermo e di Messina.

La tabella N. 2 dimostra che nella provincia di Palermo lo inizio della leishmaniosi è possibile nei mesi estivi, perchè anche in questi mesi si osservano talora delle temperature massime che non sorpassano i 30° ctgr., ma che il maggior numero di casi, come scrive lo Jemma, ricorre nei mesi invernali (dicembre, gennaio e febbraio) o al principio della primavera (marzo), quando appunto si riscontrano delle temperature comprese fra 18° 22° ctgr.; per le stesse ragioni, come è dimostrato nella tabella N. 3, si spiega la ricorrenza primaverile osservata dal Gabbi in Messina.

Anche la umidità ha certamente un'influenza sulla capacità infettante della pulce nella leishmaniosi interna del Mediterraneo; è molto difficile poter stabilire il grado più favorevole di umidità in rapporto alla temperatura; a me sembra poter dedurre dai dati meteorologici, che le condizioni più favorevoli di umidità variano nella media giornaliera fra 65 e 75.

Hydra

Dati meteorologici



Casi osservati dal 1910 al 1913

	1910	1911	1912	1913	
	— 18	18°-22°	18°-30°	+ 30°	
Ottobre . .	0	0	5	0	= 5
Novembre.	0	2	0	0	= 2
Dicembre.	0	3	0	0	= 3
Gennaio. .	0	3	0	0	= 3
Febbraio .	3	7	0	0	= 10
Marzo. . .	0	5	0	0	= 5
Aprile. . .	0	1	1	0	= 2
Maggio . .	0	0	3	1	= 4
Giugno . .	0	0	0	3	= 3
Luglio. . .	0	0	0	0	= 0
Agosto . .	0	0	0	0	= 0
Settembre.	0	0	0	0	= 0
	3	21	9	4	= 37

Tabella N. 1

Palermo

Dati meteorologici

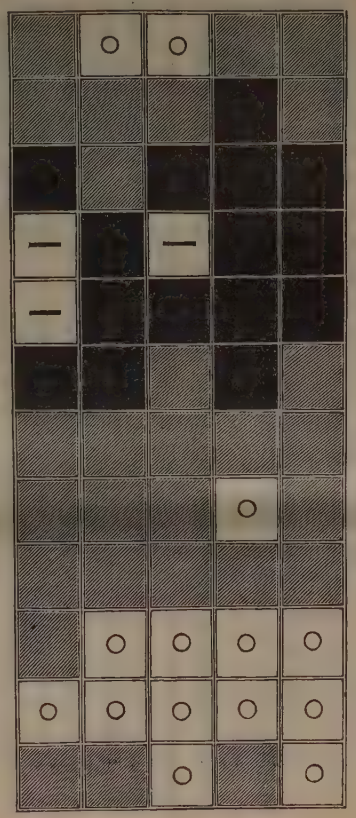


Tabella N. 2

Messina

Dati meteorologici

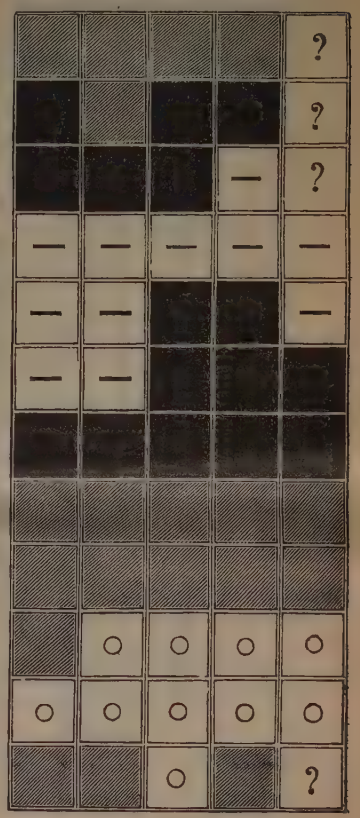


Tabella N. 3

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Sanzo L., *Stadî larvali di Bathophilus nigerrimus* Gigl. Presentata dal Socio Grassi

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio E. Marchiafava legge la seguente Commemorazione del Socio straniero prof. Edwin Klebs:

Con Edwin Klebs è scomparso in Germania un altro dei veterani della Patologia, nostro Socio Corrispondente; Edwin Klebs salito in fama in tempi omai lontani, poco noto ai giovani, non dimenticato da noi vecchi cultori della Patologia consapevoli della sua vita di lavoro per il progresso di questa scienza.

Nato in Könisberg i. P. nel 1834, compì i primi cinque semestri di medicina nella università della sua città natale avendo fra i suoi maestri Burdach e Helmhotz.

Nel 1855, a Würzburg, sotto l'influenza dell'insegnamento di Virchow si decise di dedicarsi alla Patologia.

Quando nel 1856 Virchow andò a Berlino, Klebs lo seguì e vi conseguì il dottorato con la dissertazione, *De mutationibus quae in intestino inveniuntur tubercolosis*, quasi designandosi così lo studio, che doveva maggiormente attrarlo e che doveva pur essergli fonte più di dolori che di compiacenze.

Nel 1858 passò l'esame di stato, e in quell'anno appariva la prima edizione della Patologia cellulare del suo grande Maestro.

Ritornò nella sua patria, fu assistente nell'Istituto fisiologico di Wittich e nel 1859 pubblicò negli archivi di Virchow il suo primo lavoro: *Sopra i psorospermi nell'interno delle cellule animali.*

Nel 1860, nell'occasione di un Congresso a Könisberg, incontratosi con Virchow, fu da questo invitato di andare nel suo Istituto a Berlino. Klebs vi andò e vi rimase fino al 1866 in continuo lavoro, avendo per compagni in quell'epoca gloriosa nella storia della medicina, Recklinghausen, Kühne, Cohnheim, Liebreich, Leyden, i quali tutti emersero poi nei varî rami della scienza medica.

Nel 1866 fu chiamato a Berna come straordinario di Patologia, promosso ordinario nell'anno seguente. In questo tempo Klebs cominciò a vol-

gere la sua attività allo studio della malattia d'infezione con un entusiasmo, che nessuno, almeno in Germania, vi aveva messo fino allora e additò ai Patologi la importanza della Batteriologia per conseguire le vere cognizioni sulla etiologia e sulla genesi di molti processi morbosi, la cui morfologia era quasi esclusivamente studiata.

Nel 1868, poco dopo le ricerche di Villemin in Francia, s'iniziarono i suoi lavori sperimentali sulla tubercolosi, e nel 1869 cominciò la pubblicazione del suo trattato di anatomia patologica ricco di osservazioni e di vedute originali.

Nell'epoca della grande guerra prestò l'opera sua nell'ospedale dei tifosi dell'armata di Bourbaki costretta a rifugiarsi in Isvizzera e nel lazzaretto della stazione di Karlsruhe con Socin e con Hoffmann. Egli colse l'occasione dei numerosi casi d'infezione delle ferite per dimostrare con ricerche anatomiche e sperimentali che la infezione era provocata dalla presenza di un microrganismo sotto forma di cocchi, che egli provvisoriamente chiamò *microsporon septicum*. La prova che questi microrganismi non fossero un fatto accidentale era data da Klebs con la filtrazione dei liquidi settici: il filtrato provocava negli animali una febbre violenta, che durava tre o quattro giorni; il liquido contenente batteri uccideva gli animali con febbre continua e con estese suppurrazioni.

Le osservazioni e le ricerche fatte da Klebs, durante la guerra franco-prussiana, furono da lui pubblicate nel 1872.

In quest'anno fu chiamato nella università di Würzburg, onde, dopo tre semestri, fu chiamato a Praga, ove rimase fino al 1882. Quivi fondò con Naunyn e Schmiedeberg l'archivio di Patologia sperimentale, nel quale pubblicò la maggior parte dei suoi lavori; fu il fondatore della società dei medici tedeschi in Boemia e del giornale settimanale medico di Praga.

Nel 1874 fu pubblicato da Klebs il primo lavoro sistematico sulle malattie del Pancreas. Seguirono le nuove ricerche sulla Etiologia della tubercolosi, specialmente sulla tubercolosi alimentare, gli studî sul cretinismo, sul gozzo, sul carbonchio, sulla Endocardite, della quale distinse due forme la settica e la reumatica.

Nel discorso tenuto a Monaco nel 1877 al congresso dei naturalisti, Klebs espose chiaramente, con i nuovi problemi, le sue vedute intorno la etiologia delle malattie infettive, e, a riconoscere il rapporto fra queste e i singoli microrganismi, pose gli stessi postulati che più lucidamente dovevano essere esposti da Roberto Koch nel 1883. Questo discorso, che era la visione di ciò che doveva presto avverarsi, fu giudicato soverchiamente ardito anche da Virchow.

Nel 1878 dimostrò la trasmissibilità della sifilide dell'uomo alle scimmie, prima negata, ora ammessa dopo le recenti esperienze, che hanno seguita la scoperta dello *spirochaeta pallida*.

Vide il bacillo della infezione tifosa e il bacillo della difterite, in seguito meglio studiati da Eberth, da Gaffky e da Löffler.

Lavorò molto per ottenere culture pure dei singoli microrganismi con mezzi non adatti allo scopo, ora di solo interesse storico, prima che R. Koch scoprisse il celebre metodo dei terreni nutritivi solidi e trasparenti, per i quali si resero possibili in breve tempo quei progressi della batteriologia patologica fecondi di tanto bene per la medicina.

Nel 1882, due volte deluso nelle speranze di andare nella università di Vienna, sordo alle preghiere dei colleghi e degli amici, seguendo l'impulso del suo spirito esacerbato, accettò di andare nell'università di Zurigo al posto occupato dal suo antico assistente E. Ziegler chiamato a Würzburg.

Quivi ebbe assistenti Ernst, che ha fatto di lui una affettuosa commemorazione, Hanau, Lubarsch, Moll, Spengler, Bonome, Reinke; che tutti si fecero noti per i loro lavori scientifici e nell'insegnamento.

Fra i lavori fatti negli anni del suo soggiorno a Zurigo sono da ricordare quelli sul gigantismo con alterazioni dell'Ipofisi e della sella-turcica sopra le genesi dei tumori, sopra la trombosi, sopra la tubercolosi.

Nel 1884 andò a Genova ove infieriva il colera, e con Ceci studiò le forme di degenerazione del bacillo colerico, la patologia del Rene colerico, la genesi dell'algidismo e anche la cura del colera.

In Zurigo scrisse il suo grande trattato di Patologia generale o della dottrina delle cause e della natura dei processi morbosi, del quale uscirono soltanto i due primi volumi sulla Etiologia patologica generale e sulla Morfologia patologica generale. Deve dolerci che non sia uscito il terzo volume che doveva trattare delle Fisiologia patologica generale.

Nel 1886 divenne decano della facoltà medica di Zurigo, e in quell'anno ricevè con gioia il titolo di Socio corrispondente della nostra Accademia, anche perchè gli ricordava Roma, che egli amava e ove aveva soggiornato lungamente nel 1879 per istudiare con Tommasi-Crudeli la malaria della campagna romana, e ove aveva ricevuto accoglienze, delle quali serbava memoria riconoscente.

Quando nel 1890 fu riconosciuto che la tubercolina salutata, dopo la prima comunicazione dello scopritore, redentrice della umanità sofferente di tubercolosi, era infida e spesso dannosa, Klebs, dopo averne studiato la composizione, volle preparare una tubercolina innocua, la tubercolocidina, la quale, secondo Klebs, sarebbe la parte attiva immunizzante della tubercolina, spogliata dei principî tossici.

Dedicato a questo ed altri lavori sulla tubercolosi, mal tollerava il peso dei doveri accademici, e non trovando condiscendenza nei colleghi e negli studenti, dovè allontanarsi da Zurigo. Così, a 60 anni, senza mezzi di fortuna, senza un assegno che pur meritava per i servizî da lui resi all'insegnamento e alla scienza, cominciò la sua vita errante.

Dapprima andò a Carslruhe, poi a Strasburgo, e nel 1895 negli Stati Uniti di America, ove prima fu direttore di un sanatorio per tubercolosi in Asheville, nella Carolina del Nord, poi fu chiamato a Chicago professore di Patologia nel « Rush medical School » e direttore del laboratorio del « Post-graduate medical School ». Nella città di Chicago pubblicò nei giornali medici americani parecchi lavori sul tema favorito della tubercolosi; fece conferenze; fondò una società medica e conquistò una posizione onorevole. Se non che nel 1900 non potè resistere al desiderio di ritornare ove aveva per tanto tempo vissuto e, traversato di nuovo l'Atlantico, andò prima a Berna poi nella città di Hannover, ove in un privato laboratorio, senza mezzi, affievolito dagli anni e amareggiato dai disinganni si affaticò invano nella ricerca di un rimedio specifico contro la tubercolosi.

Nel 1905 si recò a Berlino ove egli, che era stato il direttore di grandi istituti, circondato da valorosi assistenti, dovè ridursi a continuare le sue ricerche in una camera dell'Istituto patologico di quella città.

Nel 1907, nella ricorrenza del 50.^{mo} anno del dottorato, l'università di Berlino gli conferì un diploma di onore.

Nel 1910 da Berlino andò a Losanna; quivi scrisse l'ultimo suo lavoro sulla tubercolosi. Dopo tre anni di soggiorno in questa città con il figlio, volle rivedere la sua Berna, ove mezzo secolo prima aveva cominciato la sua, per non breve tempo, brillante carriera e aveva trovato la compagna buona e fedele della sua vita, e ove si spense placidamente.

Questa la vita di E. Klebs, d'ingegno ardente, di largo sapere, di vedute originali, di gagliarda iniziativa; il quale con la geniale intuizione precorse i progressi della medicina, dei quali egli doveva essere testimonio e ai quali in parte contribuì.

Pieno di entusiasmo per i suoi alti ideali, non conobbe mai la pratica della vita, onde le difficoltà materiali, i dolori, le delusioni che lo tormentarono nella lunga esistenza. Il suo carattere irrequieto, insofferente, facile agli impeti del cruccio gli toglieva spesso la calma del ricercatore e gli procurò inimicizie e fu la causa della sorte non lieta della ultima parte della sua vita. Chi per altro lo conosceva da vicino, doveva persuadersi che sotto quest'apparenza di rudezza e talora di scortesia si celava un animo retto, buono, pronto al soccorso di ogni sventura e all'ammirazione di ogni nobile azione, di ogni progresso, frutto dell'ingegno e del lavoro.

Nella storia della medicina egli lascia un'orma, che non si cancellerà.

Oltre le sue ricerche nella Morfologia patologica che portarono alla conoscenza di fatti, che omai fanno parte del patrimonio della scienza, e i suoi trattati, che saranno sempre consultati con utilità, chi potrà disconoscere l'alto merito che si ebbe Klebs nella dottrina della tubercolosi con i suoi primi lavori?

Quando quasi tutti i patologi, in Germania, anche dopo le ricerche sperimentali di Villemin in Francia, negavano la natura infettiva e la contagiosità della tubercolosi, alla quale i profani continuavano a credere, quando nel 1870 un clinico illustre, F. Niemayer, insegnava come un grande progresso che la tisi polmonare era provocata da qualsiasi processo flogistico in soggetti predisposti e non sapeva persuadersi come vi fossero ancora medici fedeli alla dottrina tubercolare della tisi polmonare, quando da ricercatori eminenti per talento e per posizione, non si ammetteva un *virus* specifico tubercolare, affermandosi che la tubercolosi poteva essere prodotta negli animali anche da corpi estranei; fu Klebs che dal 1868, con le sue ricerche sperimentali e con il suo acuto ragionamento, sostenne con tale fermezza in Germania la trasmissibilità e la contagiosità della tubercolosi per un *virus* specifico da indurre un grande patologo a ripetere con maggiori cautele, le investigazioni sperimentali e a convincersi che la tubercolosi si riproduce negli animali soltanto per la inoculazione di prodotti tubercolari.

Ciò è omai storia antica e però poco conosciuta, ma di quale importanza in quei tempi d'incertezze e di esitazioni con danno gravissimo della medicina pratica e della igiene!

Come nella dottrina della tubercolosi, così in quella della dottrina in genere delle malattie infettive, egli è benemerito, come ho ricordato nel cenno biografico. Klebs comprese che la Patologia cellulare, la meravigliosa, abbagliante conquista, come egli la chiamava, di tutta la Patologia, doveva congiungersi alla ricerca della etiologia dei morbi infettivi, i quali per i fatti clinici, anatomici ed epidemiologici s'intuivano già come provocati da esseri viventi, da quelli *animalia quaedam minuta* di Varrone, *quae non possunt oculi consequi... atque difficiles efficiunt morbos.*

Nella Storia della Medicina di Pushmann, Klebs è ricordato fra i precursori dell'epoca gloriosa della batteriologia patologica dopo il grande Pasteur, dopo Lister, dopo Ferdinando Cohn. E perchè questo giudizio non possa sembrare troppo benevolo, io ricorderò le parole che di Klebs scriveva nel 1882 Giulio Cohnheim, nelle sue Lezioni di Patologia generale, un anno prima della scoperta del bacillo tubercolare di R. Koch, dopo i lavori di questo sul carbonchio e sulle infezioni delle ferite. Cohnheim adunque, ricordata l'importanza delle esperienze di Klebs con le filtrazioni dei liquidi contenenti batteri, dei suoi tentativi di cultura per distinguere i varî microorganismi, e di tutti i suoi lavori sulle malattie infettive, concludeva « che anche coloro che non sono convinti di tutti i risultati delle ricerche di Klebs, non possono negargli il grande e duraturo merito di avere in ogni tempo tenuto atta la bandiera della teoria parassitaria delle malattie d'infezione con instancabile operosità, non scossa nè dalla indifferenza nè dagli ingiusti attacchi, e di averla portata più di qualsiasi altro alla vittoria ».

Queste parole scritte dal geniale patologo di Lipsia 34 anni or sono, quando Klebs era nel fiore della maturità, si possono, io credo, ripetere oggi dopo la sua morte.

Klebs non ottenne dalle sue ricerche quei successi cui aspirava, e spesso errò. Ma le vie delle conquiste scientifiche, come tutte le vie delle conquiste umane, furono spesso percorse, prima della vittoria, da ingegni intuitivi, volenterosi, ardenti, che non raggiunsero la mèta agognata e le cui prime orme spesso guidarono i vincitori.

E. Klebs non fu tra questi, ma uno dei maggiori fra i primi. Onore alla sua memoria!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Taramelli, Loria Gino, Wagner, Orth; e dei signori Agamennone ed Eredia. Fa inoltre particolare menzione di un volume contenente una raccolta di *Scritti geografici* del Socio senatore Dalla Vedova, pubblicati in onore di quest'ultimo, in occasione del suo 80° genetliaco.

E presenta ancora le seguenti pubblicazioni della Università di Yale: Campbell, *I moti stellari*; Bateson, *Problemi genetici*; Verworn, *Irritabilità*.

Il Socio Maggi fa omaggio del suo volume recentemente apparso: *Geometria del movimento*, e ne discorre.

Il Socio Volterra offre una traduzione in tedesco delle lezioni di fisica-matematica, da lui dettate nel 1909 alla Clark-University.

Il Presidente Blaserna presenta un volume pubblicato dal principe von Bülow, avente per titolo: *Deutsche Politik* di cui l'autore ha fatto dono all'Accademia. Il Presidente rileva la importanza politica di questo scritto il quale fa parte di una pubblicazione in tre volumi, destinata a celebrare il 25° anniversario del regno dell'imperatore Guglielmo II; e aggiunge che del dono bellissimo si è fatto premura di ringraziare l'Autore a nome dell'Accademia.

CONCORSI A PREMI

Il Presidente Blaserna, comunica che il prof. Negro ha dichiarato di ritirarsi dal concorso al premio Reale, del 1913, per la *Fisiologia normale e patologica*.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente Blaserna annuncia che alla seduta assistono il Socio straniero Sir Archibald Geikie e il prof. Pionchon dell'Università di Digione.

E. M.